

Continuité d'une fonction numérique

Continuité ■ Théorème des valeurs intermédiaires ■ Fonction réciproque

Informations du document

Niveau	Deuxième année du Baccalauréat
Filière	Sciences Physiques (PC)
Année scolaire	2026–2027
Établissement	Lycée Technique Settati

IDENTITÉ DU PROFESSEUR

Khalid Legdani

Professeur d'enseignement secondaire qualifiant

Discipline	Mathématiques
Téléphone	+212 7 08 27 07 29
Site web	www.lyceemaroc.com

Table des matières

1	Continuité d'une fonction numérique	3
1.1	La continuité en un point	3
1.2	La continuité sur un intervalle	7
1.3	Opérations sur les fonctions continues	9
1.4	Image d'un intervalle par une fonction continue	12
1.5	Le théorème des valeurs intermédiaires	14
1.6	Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone	17
1.7	Fonction racine n -ième et puissances rationnelles	19
	Devoir à la maison	20

Continuité d'une fonction numérique

RAPPEL — Ce que le chapitre vise

Capacités exigibles

- ▶ Déterminer l'image d'un intervalle ou d'un segment par une fonction continue, ou continue et strictement monotone.
- ▶ Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour étudier une équation, une inéquation ou le signe d'une expression.
- ▶ Utiliser la dichotomie pour encadrer la solution d'une équation.
- ▶ Utiliser le théorème des fonctions réciproques.

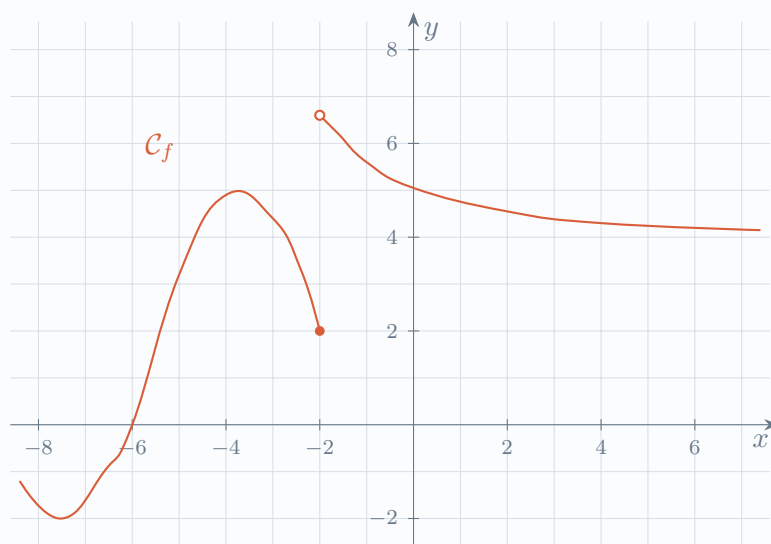
Prérequis

- ▶ Généralités sur les fonctions numériques.
- ▶ Limites et dérivation.
- ▶ L'étude des fonctions.

1.1 La continuité en un point

ACTIVITÉ 1 — Lecture graphique

On considère la fonction f dont la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ est donnée ci-dessous.



- 1) Déterminer graphiquement $f(-6)$ et $\lim_{x \rightarrow -6} f(x)$. Que peut-on en déduire ?
- 2) Déterminer graphiquement $f(-2)$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$.
- 3) Que peut-on dire de $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse $x_0 = -2$?

DÉFINITION 1 — Continuité en un point

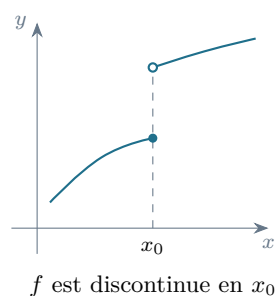
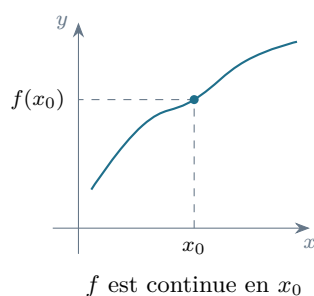
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.

On dit que f est **continue en x_0** si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

REMARQUE 1

Retenir les trois conditions cachées derrière cette égalité : f est définie en x_0 , la limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe, et cette limite vaut exactement $f(x_0)$.

**EXEMPLE 1 — Comment rédiger une étude de continuité en un point**

Montrons que la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1, \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

est continue en 1.

Étape 1 : Calculer $f(x_0)$. On a : $f(1) = 2$.

Étape 2 : Calculer la limite en x_0 . Calculons :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

Étape 3 : Comparer. Or $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 = f(1)$.

Conclusion : Par conséquent, f est continue en 1.

EXEMPLE 2 — Un cas de discontinuité

Montrons que la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2x)}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

est discontinue en 0.

On a $g(0) = 1$. De plus :

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \times \frac{\sin(2x)}{2x} = 2 \times 1 = 2.$$

Or $2 \neq 1$, d'où $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \neq g(0)$.

Conclusion : Ainsi, g n'est pas continue en 0 : on dit qu'elle est **discontinue** en 0.

APPLICATION 1

Étudier la continuité de f au point x_0 dans chacun des cas suivants.

$$1) \quad x_0 = 1 \text{ et } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}, & x \neq 1, \\ 3, & x = 1. \end{cases}$$

$$2) \quad x_0 = 2 \text{ et } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2}, & x \neq 2, \\ 12, & x = 2. \end{cases}$$

SOLUTION 1

1) On a $f(1) = 3$. Puisque $x - 1 = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)$ pour $x \geq 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}.$$

Or $\frac{1}{2} \neq 3 = f(1)$. Donc f n'est pas continue en 1.

2) On a $f(2) = 12$. Puisque $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$:

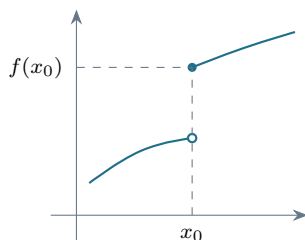
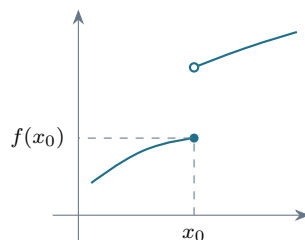
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) = 4 + 4 + 4 = 12.$$

Or $12 = f(2)$. Donc f est continue en 2.

Continuité à droite, continuité à gauche

DÉFINITION 2 — Continuité à droite et à gauche en un point

- Soit f définie sur un intervalle de la forme $[x_0; x_0 + \alpha[$ avec $\alpha > 0$. On dit que f est **continue à droite en** x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
- Soit f définie sur un intervalle de la forme $]x_0 - \alpha; x_0]$ avec $\alpha > 0$. On dit que f est **continue à gauche en** x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

 f est continue à droite en x_0  f est continue à gauche en x_0 **PROPRIÉTÉ 1**

$$f \text{ est continue en } x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Autrement dit : f est continue en x_0 si et seulement si elle est continue à droite *et* à gauche en x_0 .

EXEMPLE 3 — Étude d'une fonction définie par morceaux

Étudions la continuité en 0 de

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x+1}, & x > 0, \\ 3-x^2, & x \leq 0. \end{cases}$$

Étape 1 : Valeur en 0. Puisque $0 \leq 0$, on utilise la seconde expression : $f(0) = 3 - 0^2 = 3$.

Étape 2 : Limite à droite. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-2}{x+1} = \frac{-2}{1} = -2$. Or $-2 \neq 3 = f(0)$, donc f n'est pas continue à droite en 0.

Étape 3 : Limite à gauche. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3 - x^2) = 3 = f(0)$, donc f est continue à gauche en 0.

Conclusion : f est continue à gauche en 0 mais pas à droite ; d'après la propriété précédente, f n'est donc pas continue en 0.

APPLICATION 2

On considère f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x \geq 1, \\ (x-1)^2, & x < 1. \end{cases}$$

- 1) Étudier la continuité de f à droite et à gauche en 1.
- 2) f est-elle continue en 1 ?

SOLUTION 2

On a $f(1) = 1 - 1 = 0$.

1) À droite : $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0 = f(1)$, donc f est continue à droite en 1.

À gauche : $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1)^2 = 0 = f(1)$, donc f est continue à gauche en 1.

2) Puisque f est continue à droite et à gauche en 1, elle est **continue en 1**.

EXERCICE 1

1) Étudier la continuité de f au point x_0 :

a) $x_0 = -1$ et $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x+3}-1}{x^2-1}, & x \neq -1, \\ 5, & x = -1; \end{cases}$

b) $x_0 = 0$ et $f(x) = \begin{cases} \frac{x + \tan(2x)}{\sin(3x)}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

2) Déterminer la valeur du réel a pour que la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4x^2 - 3x - 27}{x - 3}, & x \neq 3, \\ a, & x = 3 \end{cases}$$

soit continue en 3.

3) Soit g définie par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{x-1}, & x \neq 1, \\ a, & x = 1. \end{cases}$$

Déterminer a pour que g soit continue en 1.

INDICATION

Poser $X = x - 1$ et utiliser $\sin(\pi X + \pi) = -\sin(\pi X)$.

1.2 La continuité sur un intervalle

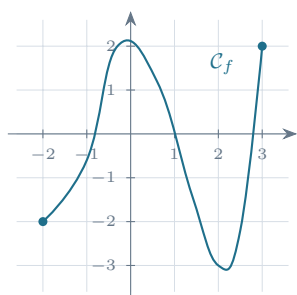
DÉFINITION 3 — Continuité sur un intervalle

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

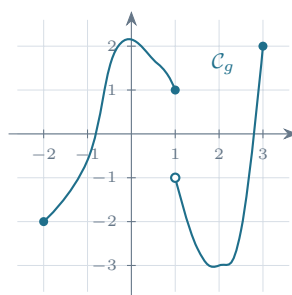
- f est continue sur l'intervalle ouvert $]a; b[$ si elle est continue en tout élément de cet intervalle.
- f est continue sur le segment $[a; b]$ si elle est continue sur $]a; b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b .

REMARQUE 2

On définit de la même façon la continuité sur les intervalles $[a; b[$, $]a; b]$, $[a; +\infty[$ et $] -\infty; a]$.



f est continue sur $[-2; 3]$



g n'est pas continue sur $[-2; 3]$

PROPRIÉTÉ 2 — Continuité des fonctions usuelles

- ▶ Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
- ▶ Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.
- ▶ Toute fonction constante est continue sur $\mathbb{R}$.
- ▶ $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto |x|$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- ▶ $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- ▶ $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.
- ▶ $x \mapsto \tan x$ est continue sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.

EXEMPLE 4 — Justifier la continuité sur un intervalle

- 1) $f : x \mapsto x^5 + x^3 + 4x^2 + 3$ est continue sur $\mathbb{R}$ *parce qu'elle est une fonction polynôme.*
- 2) $g : x \mapsto \frac{4x^2 + 3}{x - 2}$ est continue sur $]2; +\infty[$ *parce que g est une fonction rationnelle et $]2; +\infty[\subset D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.*

REMARQUE 3

Une rédaction complète comporte toujours deux éléments : la *nature* de la fonction, et l'*intervalle* sur lequel on conclut.

APPLICATION 3

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1}, & x < -1, \\ 5x^2 + x - 2, & x \geq -1. \end{cases}$$

- 1) Montrer que f est continue sur $[-1; +\infty[$.
- 2) Montrer que f est continue sur $] -\infty; -1[$.
- 3) Calculer $f(-1)$ et montrer que f est continue à gauche en -1 .
- 4) En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.

SOLUTION 3

- 1) Sur $[-1; +\infty[$, $f(x) = 5x^2 + x - 2$ est une fonction polynôme, donc f est continue sur $[-1; +\infty[$.
- 2) Sur $] -\infty; -1[$, f est la fonction rationnelle $x \mapsto \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1}$, et $] -\infty; -1[\subset \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$. Donc f est continue sur $] -\infty; -1[$.
- 3) On a $f(-1) = 5 - 1 - 2 = 2$. Puisque $3x^2 + 2x - 1 = (x + 1)(3x - 1)$ et $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x + 1)(3x - 1)}{(x + 1)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x - 1}{x - 1} = \frac{-4}{-2} = 2 = f(-1).$$

Donc f est continue à gauche en -1 .

Conclusion : D'après **2)** et **3)**, f est continue sur $] -\infty; -1]$; avec **1)**, f est continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction partie entière

DÉFINITION 4 — Fonction partie entière

La fonction qui, à tout réel x , associe l'unique entier relatif p vérifiant

$$p \leq x < p + 1$$

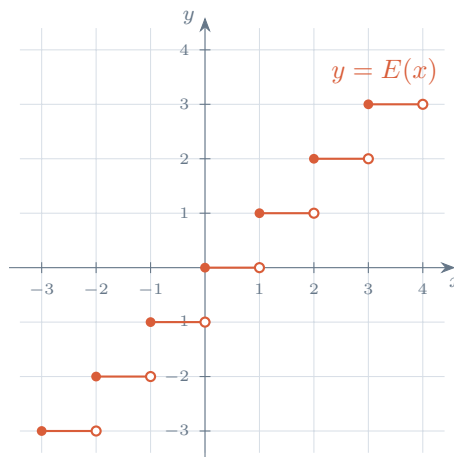
est appelée **fonction partie entière**. L'image de x est notée $E(x)$.

EXEMPLE 5 — Calculs de parties entières

$$\begin{aligned} E(3,3) &= 3, & E(0,5) &= 0, & E(-7,99) &= -8, & E\left(\frac{9}{5}\right) &= 1, \\ E(7) &= 7, & E(\pi) &= 3, & E(-0,23) &= -1, & E(\sqrt{2} + \sqrt{3}) &= 3. \end{aligned}$$

REMARQUE 4

Attention au cas des négatifs : $E(-7,99) = -8$ et non -7 , car il faut $p \leq x$.



PROPRIÉTÉ 3 — Conséquences

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{Z}$:

- ▶ $E(x) = x \iff x \in \mathbb{Z}$;
- ▶ la fonction partie entière est continue à droite en p et discontinue à gauche en p ; elle n'est donc pas continue en p ;
- ▶ elle est continue sur tout intervalle $[p; p + 1[$.

1.3 Opérations sur les fonctions continues

PROPRIÉTÉ 4 — Somme, produit, quotient, racine

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et u, v deux fonctions définies sur I .

- 1) Si u et v sont continues sur I , alors $u + v$, $u - v$, $u \times v$, αu ($\alpha \in \mathbb{R}$), $|u|$ et u^n ($n \in \mathbb{N}^*$) sont continues sur I .
- 2) Si u est continue sur I et $(\forall x \in I) u(x) \neq 0$, alors $\frac{1}{u}$ est continue sur I .

- 3) Si u et v sont continues sur I et $(\forall x \in I) v(x) \neq 0$, alors $\frac{u}{v}$ est continue sur I .
- 4) Si u est continue sur I et $(\forall x \in I) u(x) \geq 0$, alors $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est continue sur I .

EXEMPLE 6 — Rédiger avec les opérations

- 1) $f : x \mapsto 4x^2 + 3 + \sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme *somme* des fonctions continues $x \mapsto 4x^2 + 3$ et $x \mapsto \sin x$.
- 2) $f : x \mapsto (x^2 + 2x)\sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ comme *produit* des fonctions continues $x \mapsto x^2 + 2x$ et $x \mapsto \sqrt{x}$.
- 3) $f : x \mapsto \frac{\cos x}{x^2 + 1}$ est continue sur $\mathbb{R}$: c'est un *quotient* de fonctions continues et $x^2 + 1 \neq 0$ sur $\mathbb{R}$.
- 4) $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 2}$ est continue sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto x^2 + 2$ est continue et $x^2 + 2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

APPLICATION 4

Montrer que f est continue sur I dans chacun des cas suivants.

- 1) $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x^2+1}$, $I = [-3; +\infty[$;
- 2) $f(x) = \frac{4x+1}{x^2-1} \sin x$, $I =]1; +\infty[$;
- 3) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+2x+1}$, $I = [0; 3]$;
- 4) $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$, $I = \mathbb{R}$.

SOLUTION 4

- 1) Sur $[-3; +\infty[$: $x+3 \geq 0$ donc $x \mapsto \sqrt{x+3}$ est continue ; $x \mapsto x^2+1$ est continue et ne s'annule pas. Le quotient est donc continu sur I .
- 2) Sur $]1; +\infty[$: $x^2-1 \neq 0$, donc $x \mapsto \frac{4x+1}{x^2-1}$ est continue ; $x \mapsto \sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$. Le produit est continu sur I .
- 3) Sur $[0; 3]$: $x \geq 0$ donc $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue ; $x^2+2x+1 = (x+1)^2 \neq 0$ sur $[0; 3]$. Le quotient est continu sur I .
- 4) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, et $x \mapsto x^2 - x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

PROPRIÉTÉ 5 — Continuité de la composée

Soient u et v deux fonctions, I et J deux intervalles.

- 1) Si u est continue en x_0 et v est continue en $u(x_0)$, alors $v \circ u$ est continue en x_0 .
- 2) Si u est continue sur I , v continue sur J et $u(I) \subset J$, alors $v \circ u$ est continue sur I .

EXEMPLE 7 — Reconnaître une composée

- 1) $f : x \mapsto \cos(x^2 + 3x - 2)$ est continue sur $\mathbb{R}$. En effet $f = v \circ u$ avec $u(x) = x^2 + 3x - 2$ continue sur $\mathbb{R}$ et $v(x) = \cos x$ continue sur $\mathbb{R}$.
- 2) $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x}{1 + \sin^2 x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$: $f = v \circ u$ avec $u(x) = \frac{x}{1 + \sin^2 x}$, continue et positive sur $\mathbb{R}^+$, et $v(x) = \sqrt{x}$ continue sur $\mathbb{R}^+$.

PROPRIÉTÉ 6 — Limite d'une composée

Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = \ell$ et si v est continue en ℓ , alors

$$\lim_{x \rightarrow a} (v \circ u)(x) = v(\ell).$$

APPLICATION 5

- 1) Déterminer u et v telles que $f = v \circ u$, puis montrer que f est continue sur I :

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, $I =]-\infty; -2]$;

b) $f(x) = \sqrt{\frac{3x+1}{x-1}}$, $I =]1; +\infty[$;

c) $f(x) = \sin(2x^2 + 1)$, $I = \mathbb{R}$;

d) $f(x) = \cos(\sqrt{x^2 + x + 1})$, $I = \mathbb{R}$.

- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi x + 3}{2x - 7}\right)$.

SOLUTION 5

1.d) $f = v \circ u$ avec $u(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ et $v(x) = \cos x$. Comme $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, u est continue sur $\mathbb{R}$; v est continue sur $\mathbb{R}$ et $u(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Posons $u(x) = \frac{\pi x + 3}{2x - 7}$. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \frac{\pi}{2}$. La fonction $\sin$ étant continue en $\frac{\pi}{2}$, la propriété précédente donne

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi x + 3}{2x - 7}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

EXERCICE 2

- 1) Montrer que la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1}, & x < -1, \\ 5x^2 + x - 2, & x \geq -1 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

- 2) Soit g définie sur $] -4; +\infty[$ par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x+4}-2}, & x \neq 0, \\ 4, & x = 0. \end{cases}$$

Étudier la continuité de g sur $] -4; +\infty[$.

3) Soit h définie par

$$h(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 2}, & x > 2, \\ \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{\sqrt{x + 2} - 2}, & x < 2, \\ \frac{8}{3}, & x = 2. \end{cases}$$

Déterminer D_h , montrer que h est continue en 2, puis étudier la continuité de h sur D_h .

1.4 Image d'un intervalle par une fonction continue

DÉFINITION 5 — Image d'un intervalle

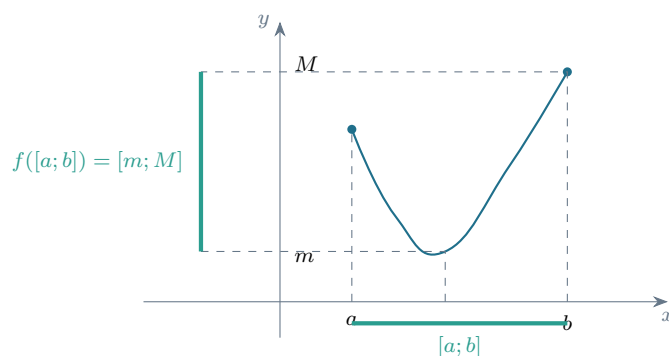
L'image d'un intervalle I par une fonction f est l'ensemble des images des éléments de I :

$$f(I) = \{ f(x) / x \in I \}.$$

PROPRIÉTÉ 7 — Image d'un intervalle, image d'un segment

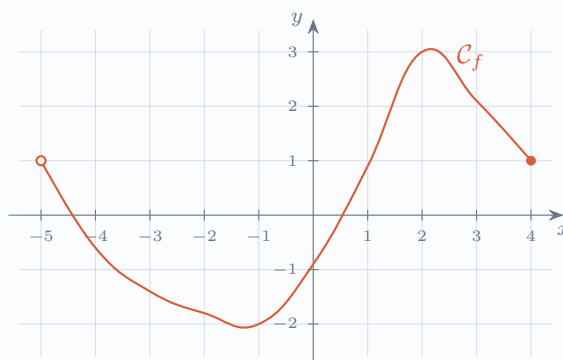
- L'image d'un **intervalle** par une fonction continue est un **intervalle**.
- L'image d'un **segment** par une fonction continue est un **segment**.

Plus précisément, si f est continue sur $[a; b]$, alors $f([a; b]) = [m; M]$ où m est le minimum et M le maximum de f sur $[a; b]$.



EXEMPLE 8 — Lecture graphique d'images d'intervalles

On considère la fonction f dont la courbe est donnée ci-dessous.



On lit directement sur la courbe :

$$f(]-5; -1]) = [-2; 1[, \quad f([-1; 2]) = [-2; 3],$$

$$f([2; 4]) = [1; 3], \quad f(]-5; 4]) = [-2; 3].$$

REMARQUE 5

Le crochet ouvert de $[-2; 1[$ vient de la borne *ouverte* -5 : la valeur 1 n'est jamais atteinte. Sur un segment fermé, l'image d'une fonction continue est toujours un segment fermé.

PROPRIÉTÉ 8 — Image par une fonction continue et strictement monotone

Soit f continue et strictement monotone sur un intervalle I .

Intervalle I	f strictement croissante	f strictement décroissante
$[a; b]$	$[f(a); f(b)]$	$[f(b); f(a)]$
$[a; b[$	$f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a)$
$]a; b]$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b)$	$f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$
$]a; b[$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$
$[a; +\infty[$	$f(a); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(a)$
$] - \infty; b]$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(b)$	$f(b); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Il n'y a rien à apprendre par cœur : on ferme le crochet du côté où la borne est atteinte, on l'ouvre du côté où l'on passe par une limite.

EXEMPLE 9 — Utiliser un tableau de variations

Soit f continue sur $\mathbb{R}^*$, de tableau de variations suivant.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	-2	$+\infty$	2	$+\infty$

Étape 1 : Repérer la monotonie sur l'intervalle demandé.

Étape 2 : Appliquer le tableau précédent.

- Sur $] - \infty; -1]$, f est strictement croissante, donc

$$f(]-\infty; -1]) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(-1) \right] =] - \infty; -2].$$

- Sur $]0; 1]$, f est strictement décroissante, donc

$$f(]0; 1]) = \left[f(1); \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right] = [2; +\infty[.$$

- Sur $[1; +\infty[$, f est strictement croissante, donc

$$f([1; +\infty[) = \left[f(1); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right] = [2; +\infty[.$$

APPLICATION 6

Soit $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$.

- 1) Déterminer D_f .
- 2) Étudier la monotonie de f sur chaque intervalle de D_f .
- 3) Déterminer $f(]-\infty; -2])$, $f(]-1; 3])$, $f([2; 4])$ et $f(]-1; +\infty[)$.

SOLUTION 6

1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\} =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$.

2) Pour $x \neq -1$:

$$f'(x) = \frac{2(x+1) - (2x-3)}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2} > 0.$$

Donc f est strictement croissante sur $]-\infty; -1[$ et sur $]-1; +\infty[$.

3) On calcule d'abord les valeurs et limites utiles :

$$f(-2) = \frac{-7}{-1} = 7, \quad f(3) = \frac{3}{4}, \quad f(2) = \frac{1}{3}, \quad f(4) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2.$$

D'où, f étant strictement croissante sur chacun des intervalles :

$$f(]-\infty; -2]) =]2; 7], \quad f(]-1; 3]) =]-\infty; \frac{3}{4}],$$

$$f([2; 4]) = \left[\frac{1}{3}; 1\right], \quad f(]-1; +\infty[) =]-\infty; 2[.$$

1.5 Le théorème des valeurs intermédiaires

ACTIVITÉ 2 — Vers le T.V.I.

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ telle que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$.

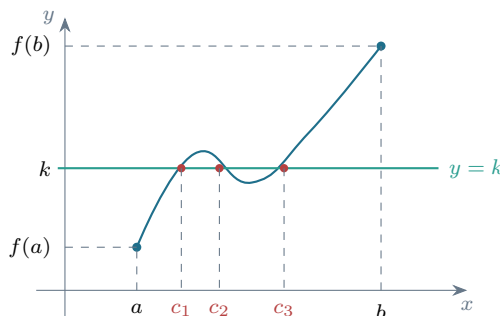
- 1) Tracer, à main levée, trois courbes différentes vérifiant ces conditions.
- 2) Dans chaque cas, la courbe coupe-t-elle l'axe des abscisses ?
- 3) Peut-on tracer une telle courbe *sans* couper l'axe des abscisses ? Que faudrait-il pour y parvenir ?

PROPRIÉTÉ 9 — Théorème des valeurs intermédiaires (T.V.I.)

Soit f une fonction **continue** sur un segment $[a; b]$.

Pour tout réel k **compris entre** $f(a)$ **et** $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$.

Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ admet **au moins une solution** dans $[a; b]$.



PROPRIÉTÉ 10 — Cas particulier très utilisé

Soit f continue sur $[a; b]$.

- Si $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]a; b[$.
- Si de plus f est **strictement monotone** sur $[a; b]$, alors cette solution est **unique**.

EXEMPLE 10 — Rédaction type : existence et unicité

Montrons que l'équation $x^3 + x + 1 = 0$ admet une unique solution α telle que $-1 < \alpha < 0$.

Posons $f(x) = x^3 + x + 1$.

Étape 1 : Continuité. f est une fonction polynôme, donc continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[-1; 0]$.

Étape 2 : Stricte monotonie. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, donc f est strictement croissante sur $[-1; 0]$.

Étape 3 : Signe aux bornes. $f(-1) = -1 - 1 + 1 = -1 < 0$ et $f(0) = 1 > 0$, d'où $f(-1) \times f(0) < 0$.

Conclusion : D'après le T.V.I., l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $] -1; 0[$, c'est-à-dire $-1 < \alpha < 0$.

REMARQUE 6

Les trois étapes — *continuité*, *stricte monotonie*, *signe aux bornes* — doivent apparaître explicitement dans la copie. C'est ce qui est attendu à l'examen.

APPLICATION 7

- 1) Montrer que l'équation $2x^3 - 5x^2 - 3 = 0$ admet une unique solution dans $\left[\frac{5}{2}; 3\right]$.
- 2) Montrer que l'équation $\sin x + x + \frac{1}{2} = 0$ admet une unique solution dans $\left[-\frac{\pi}{6}; 0\right]$.

SOLUTION 7

1) Posons $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 3$. f est une fonction polynôme, donc continue sur $\left[\frac{5}{2}; 3\right]$. De plus $f'(x) = 6x^2 - 10x = 2x(3x - 5) > 0$ pour $x > \frac{5}{3}$, donc f est strictement croissante sur $\left[\frac{5}{2}; 3\right]$. Enfin

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = 2 \times \frac{125}{8} - 5 \times \frac{25}{4} - 3 = \frac{125}{4} - \frac{125}{4} - 3 = -3 < 0, \quad f(3) = 54 - 45 - 3 = 6 > 0.$$

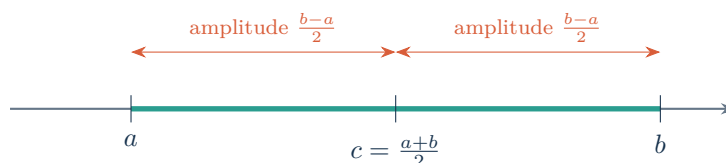
Donc $f\left(\frac{5}{2}\right) f(3) < 0$ et, d'après le T.V.I., l'équation admet une unique solution dans $\left[\frac{5}{2}; 3\right]$.

2) Posons $g(x) = \sin x + x + \frac{1}{2}$. g est continue sur $[-\frac{\pi}{6}; 0]$ comme somme de fonctions continues. $g'(x) = \cos x + 1 > 0$ sur cet intervalle, donc g est strictement croissante. Enfin

$$g(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6} < 0, \quad g(0) = \frac{1}{2} > 0.$$

D'après le T.V.I., l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $]-\frac{\pi}{6}; 0[$.

La méthode de dichotomie



PROPRIÉTÉ 11 — Méthode de dichotomie

On suppose que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α dans $]a; b[$. On pose $c = \frac{a+b}{2}$, le **centre** de l'intervalle, et on calcule $f(c)$:

- si $f(a) \times f(c) < 0$, alors $\alpha \in]a; c[$;
- si $f(c) \times f(b) < 0$, alors $\alpha \in]c; b[$.

On recommence avec le nouvel intervalle, dont l'**amplitude** $b - a$ est divisée par 2 à chaque étape, jusqu'à obtenir l'amplitude demandée.

EXEMPLE 11 — Encadrer une solution par dichotomie

Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6$.

Étape 1 : Existence et unicité sur $[-1; 0]$. f est continue sur $[-1; 0]$. Pour $x \in [-1; 0]$, $f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4) > 0$ sur $] -1; 0[$, donc f est strictement croissante sur $[-1; 0]$. Or $f(-1) = -1 - 6 + 6 = -1 < 0$ et $f(0) = 6 > 0$, donc $f(-1)f(0) < 0$. D'après le T.V.I., il existe un unique $\alpha \in] -1; 0[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Étape 2 : Première division. Le centre de $[-1; 0]$ est $c_1 = -\frac{1}{2}$ et

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} - 6 \times \frac{1}{4} + 6 = \frac{35}{8} > 0.$$

Comme $f(-1) \times f\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$, on a $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$.

Étape 3 : Deuxième division. Le centre de $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$ est $c_2 = -\frac{3}{4}$ et

$$f\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{27}{64} - 6 \times \frac{9}{16} + 6 = \frac{141}{64} > 0.$$

Comme $f(-1) \times f\left(-\frac{3}{4}\right) < 0$, on a

$$\boxed{-1 < \alpha < -\frac{3}{4}}$$

Conclusion : Cet encadrement est d'amplitude $-\frac{3}{4} - (-1) = \frac{1}{4} = 0,25$.

EXERCICE 3

Soit $f(x) = 2x^3 + 3x - 4$.

- 1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
- 2) Vérifier que $0 < \alpha < 1$.
- 3) Montrer que $\alpha = \frac{4}{2\alpha^2 + 3}$.
- 4) Déterminer un encadrement de α d'amplitude 0,25.
- 5) Donner le signe de f sur $\mathbb{R}$.

1.6 Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone

ACTIVITÉ 3 — Construire une fonction réciproque

Soit f définie sur $I = [1; 3]$ par $f(x) = x^2 - 2x$.

- 1) Montrer que f est continue et strictement monotone sur I .
- 2) Déterminer l'intervalle $J = f(I)$.
- 3) Soient $x \in J$ et $y \in I$. Montrer que $f(y) = x \iff y = 1 + \sqrt{1 + x}$.
- 4) Vérifier que $(\forall x \in I) (f^{-1} \circ f)(x) = x$ et $(\forall x \in J) (f \circ f^{-1})(x) = x$.

PROPRIÉTÉ 12 — Théorème des fonctions réciproques

Si f est **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle I , alors f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J = f(I)$.

PROPRIÉTÉ 13 — Propriétés de la fonction réciproque

Sous les mêmes hypothèses, en notant $J = f(I)$:

- ▶ f^{-1} est continue sur J ;
- ▶ f^{-1} est strictement monotone sur J , **de même sens de variation** que f sur I ;
- ▶ $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ est le symétrique de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à la droite d'équation $y = x$;
- ▶ $(\forall x \in I) (f^{-1} \circ f)(x) = x$ et $(\forall x \in J) (f \circ f^{-1})(x) = x$;
- ▶ $f^{-1}(J) = I$;
- ▶ $(\forall y \in I)(\forall x \in J) \quad f(y) = x \iff f^{-1}(x) = y$.

REMARQUE 7

Pour déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$, on résout l'équation $f(y) = x$ d'inconnue $y \in I$. La contrainte $y \in I$ est ce qui permet de choisir entre les deux solutions quand il y en a deux.

EXEMPLE 12 — Déterminer une fonction réciproque

Soit f définie sur $I = [0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

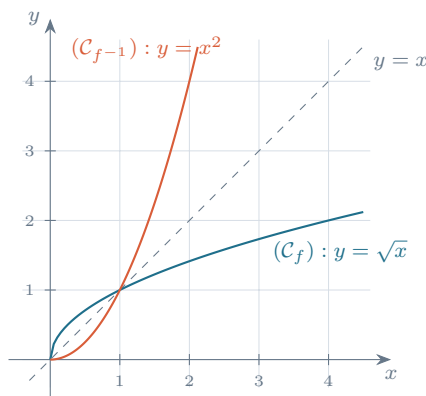
Étape 1 : Vérifier les hypothèses. f est continue et strictement croissante sur I , donc elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J = f(I) = [0; +\infty[$.

Étape 2 : Résoudre $f(y) = x$ avec $y \in I$. Soit $x \in J$:

$$f(y) = x \iff \sqrt{y} = x \iff y = x^2,$$

et $x^2 \geq 0$ appartient bien à I .

Conclusion : $(\forall x \in J) \quad f^{-1}(x) = x^2$.



Les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

APPLICATION 8

Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer, dans chacun des cas :

- 1) $f(x) = x^2 - 2x + 5$, $I = [1; +\infty[$;
- 2) $f(x) = 4x - x^2$, $I =]-\infty; 2]$;
- 3) $f(x) = 2x^2 - x + 1$, $I = \left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$.

SOLUTION 8

- 1) f est une fonction polynôme donc continue sur I ; $f'(x) = 2x - 2 \geq 0$ sur $[1; +\infty[$ et ne s'annule qu'en 1, donc f est strictement croissante sur I . Comme $f(1) = 4$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, on obtient $J = [4; +\infty[$.
- 2) f est continue sur I ; $f'(x) = 4 - 2x \geq 0$ sur $] -\infty; 2]$, donc f est strictement croissante sur I . Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $f(2) = 4$, on a $J =]-\infty; 4]$.
- 3) f est continue sur I ; $f'(x) = 4x - 1 \geq 0$ sur $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$, donc f est strictement croissante. Comme $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + 1 = \frac{7}{8}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, on a $J = \left[\frac{7}{8}; +\infty\right[$.

EXERCICE 4

Soit f définie sur $I =]-\infty; 3]$ par $f(x) = (\sqrt{3-x} + 1)^2$.

- 1) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
- 2) Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

1.7 Fonction racine n -ième et puissances rationnelles

ACTIVITÉ 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x^n$.

- 1) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
- 2) Que représente f^{-1} pour $n = 2$?

DÉFINITION 6 — Fonction racine n -ième

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction réciproque de la fonction $x \mapsto x^n$ définie sur $[0; +\infty[$ est appelée **fonction racine n -ième**. L'image d'un réel positif x est notée $\sqrt[n]{x}$.

REMARQUE 8

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $\sqrt[4]{x} = x$ et $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$. Le nombre $\sqrt[3]{x}$ est appelé *racine cubique* de x .

PROPRIÉTÉ 14

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^+$:

- ▶ $\sqrt[n]{x} = y \iff x = y^n$;
- ▶ $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \iff x = y$;
- ▶ $\sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{y} \iff x \leq y$;
- ▶ $\sqrt[n]{x^n} = (\sqrt[n]{x})^n = x$;
- ▶ $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$;
- ▶ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.

PROPRIÉTÉ 15 — Règles de calcul

Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{ab}, & \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} &= \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0), \\ \sqrt[nm]{a^m} &= \sqrt[n]{a}, & \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} &= \sqrt[nm]{a}. \end{aligned}$$

EXEMPLE 13

$$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3, \quad \sqrt[5]{3} < \sqrt[5]{8} \text{ car } 3 < 8, \quad x^5 = 32 \iff x = \sqrt[5]{32} = 2.$$

PROPRIÉTÉ 16 — Résolution de $x^n = a$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$.

- ▶ Si n est **impair** : $x^n = a \iff x = \sqrt[n]{a}$ (pour $a < 0$, $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|}$).
- ▶ Si n est **pair** et $a > 0$: $x^n = a \iff x = \pm \sqrt[n]{a}$.
- ▶ Si n est **pair** et $a < 0$: l'équation n'a pas de solution.

APPLICATION 9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\begin{aligned} x^8 - 25 &= 0, & x^4 &= 16, & x^7 &= 3, \\ x^6 &= -5, & x^7 &= -5, & (3x - 4)^5 &= 32. \end{aligned}$$

SOLUTION 9

- $x^8 = 25$ avec 8 pair et $25 > 0$: $S = \{-\sqrt[8]{25}; \sqrt[8]{25}\}$.
- $x^4 = 16$: $S = \{-2; 2\}$.
- $x^7 = 3$ avec 7 impair : $S = \{\sqrt[7]{3}\}$.
- $x^6 = -5$ avec 6 pair et $-5 < 0$: $S = \emptyset$.
- $x^7 = -5$ avec 7 impair : $S = \{-\sqrt[7]{5}\}$.
- $(3x - 4)^5 = 32 \iff 3x - 4 = 2 \iff x = 2$: $S = \{2\}$.

REMARQUE 9 — Identités utiles

$$\begin{aligned} (A - B)(A^2 + AB + B^2) &= A^3 - B^3, & (A + B)(A^2 - AB + B^2) &= A^3 + B^3, \\ (\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}) (\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{B^2}) &= A - B. \end{aligned}$$

Ces identités servent à lever les formes indéterminées contenant des racines cubiques.

EXERCICE 5

- 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sqrt[3]{4-x} = 2$, puis $\sqrt[3]{3x-1} < 2$.
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{4}}{x-2}$.
- 3) Comparer $a = \sqrt[5]{3}$ et $b = \sqrt[7]{2}$.

Devoir à la maison**DEVOIR 1 — Synthèse du chapitre**

Exercice 1. Soit f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}, & x \neq 1, \\ 2, & x = 1. \end{cases}$$

Étudier la continuité de f en 1.

Exercice 2. Soit $g(x) = x^5 + x^3 + 3x - 1$.

- 1) Montrer que g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- 2) Déterminer $g(\mathbb{R})$.
- 3) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, puis montrer que $0 < \alpha < 1$.
- 4) Déterminer un encadrement de α d'amplitude 0,25.

Exercice 3. Soit h définie sur $I = [2; +\infty[$ par $h(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

- 1) Montrer que h est continue et strictement monotone sur I .
- 2) Déterminer $J = h(I)$.
- 3) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} et déterminer $h^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.