

Informations du document

Niveau	Deuxième année du Baccalauréat
Filière	Sciences Physiques (PC)
Année scolaire	2026–2027
Établissement	Lycée Technique Settât

IDENTITÉ DU PROFESSEUR

Khalid Legdani

Professeur d'enseignement secondaire qualifiant

Discipline	Mathématiques
Téléphone	+212 7 08 27 07 29
Site web	www.lyceemaroc.com

Table des matières

Dérivation

RAPPEL — Ce que le chapitre vise

Capacités exigibles

- ▶ Étudier la dérivabilité d'une fonction en un point, à droite et à gauche, et interpréter géométriquement le résultat.
- ▶ Déterminer la fonction dérivée d'une fonction construite à partir des fonctions usuelles.
- ▶ Dériver une fonction composée, une fonction réciproque, une racine n -ième et une puissance rationnelle.
- ▶ Utiliser le signe de la dérivée pour étudier les variations et les extremums d'une fonction.
- ▶ Reconnaître un nombre dérivé pour lever une forme indéterminée.

Prérequis

- ▶ Limites d'une fonction numérique.
- ▶ Continuité d'une fonction numérique (chapitre 01).
- ▶ Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone.
- ▶ Racine n -ième et puissances rationnelles.

1.1 Le nombre dérivé

ACTIVITÉ 1 — Du taux d'accroissement au nombre dérivé

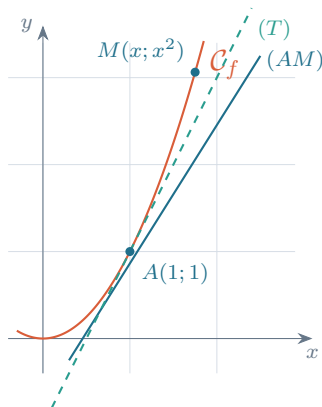
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, de courbe $(\mathcal{C}_f)$. Pour $x \neq 1$, on pose

$$T(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}.$$

- 1) Interpréter $T(x)$ comme le coefficient directeur d'une droite que l'on précisera.
- 2) Compléter le tableau suivant.

x	0,9	0,99	1,01	1,1	1,5
$T(x)$					

- 3) Simplifier $T(x)$ puis calculer $\lim_{x \rightarrow 1} T(x)$.
- 4) Vers quelle position limite semble tendre la droite (AM) lorsque M se rapproche de $A(1;1)$ le long de $(\mathcal{C}_f)$?



DÉFINITION 1 — Nombre dérivé en un point

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.

On dit que f est **dérivable en x_0** s'il existe un réel ℓ tel que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$$

Le réel ℓ s'appelle alors le **nombre dérivé** de f en x_0 ; on le note $f'(x_0)$.

REMARQUE 1

► En posant $x = x_0 + h$, la définition s'écrit aussi

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

- En physique on rencontre la notation $\frac{df}{dx}(x_0)$, et $\dot{f}(t_0)$ lorsque la variable est le temps.
- La dérivabilité est une notion **locale** : elle ne dépend que du comportement de f au voisinage de x_0 .

EXEMPLE 1 — Comment rédiger une étude de dérivabilité en un point

Étudions la dérivabilité de $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 2}$ en $x_0 = -2$.

Étape 1 : Calculer $f(x_0)$. $f(-2) = \frac{1}{4 + 2} = \frac{1}{6}$.

Étape 2 : Former le taux d'accroissement. Pour $x \neq -2$:

$$\frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \frac{\frac{1}{x^2 + 2} - \frac{1}{6}}{x + 2} = \frac{6 - (x^2 + 2)}{6(x^2 + 2)(x + 2)} = \frac{4 - x^2}{6(x^2 + 2)(x + 2)}.$$

Étape 3 : Lever l'indétermination. Comme $4 - x^2 = (2 - x)(2 + x)$:

$$\frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \frac{(2 - x)(x + 2)}{6(x^2 + 2)(x + 2)} = \frac{2 - x}{6(x^2 + 2)}.$$

Étape 4 : Passer à la limite.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \frac{2 - (-2)}{6((-2)^2 + 2)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Conclusion : f est dérivable en -2 et $f'(-2) = \frac{1}{9}$.

PROPRIÉTÉ 1 — Tangente et approximation affine

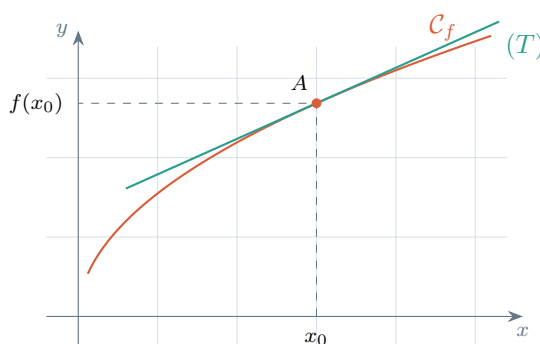
Soit f une fonction dérivable en x_0 .

► La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet au point $A(x_0; f(x_0))$ une **tangente** (T) d'équation

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

► La fonction $x \mapsto f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ s'appelle l'**approximation affine** de f au voisinage de x_0 :

$$f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad \text{ou} \quad f(x_0 + h) \approx f(x_0) + h f'(x_0).$$



EXEMPLE 2 — Utiliser l'approximation affine

Soit $f(x) = \sqrt{x+1}$. On a $f(0) = 1$ et, pour $x > -1$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$, donc $f'(0) = \frac{1}{2}$.

L'approximation affine de f au voisinage de 0 est donc

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} \quad \text{pour } x \text{ voisin de } 0.$$

Applications numériques.

$$\sqrt{0,998} = \sqrt{1 + (-0,002)} \approx 1 - 0,001 = 0,999,$$

$$\sqrt{1,003} = \sqrt{1 + 0,003} \approx 1 + 0,0015 = 1,0015.$$

(La calculatrice donne 0,998999... et 1,001498...)

APPLICATION 1

- 1) Montrer que $f : x \mapsto x^2 - 3x$ est dérivable en 2 et calculer $f'(2)$.
- 2) En déduire une équation de la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 2.
- 3) Étudier la dérivabilité de $g : x \mapsto \sqrt{x}$ en 4, puis donner une valeur approchée de $\sqrt{4,02}$.

SOLUTION 1

1) $f(2) = 4 - 6 = -2$. Pour $x \neq 2$:

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \frac{(x - 1)(x - 2)}{x - 2} = x - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 2} 1.$$

Donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = 1$.

2) $(T) : y = f'(2)(x - 2) + f(2) = 1 \cdot (x - 2) - 2$, soit $(T) : y = x - 4$.

3) $g(4) = 2$. Pour $x > 0, x \neq 4$:

$$\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \frac{\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \xrightarrow{x \rightarrow 4} \frac{1}{4}.$$

Donc g est dérivable en 4 et $g'(4) = \frac{1}{4}$. L'approximation affine donne

$$\sqrt{4,02} \approx 2 + \frac{1}{4} \times 0,02 = 2,005.$$

1.2 Dérivabilité à droite, dérivabilité à gauche

DÉFINITION 2 — Nombres dérivés à droite et à gauche

- Soit f définie sur un intervalle de la forme $[x_0; x_0 + r[$ avec $r > 0$. On dit que f est **dérivable à droite en** x_0 s'il existe un réel ℓ_1 tel que

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_1.$$

On note alors $f'_d(x_0) = \ell_1$.

- Soit f définie sur un intervalle de la forme $]x_0 - r; x_0]$ avec $r > 0$. On dit que f est **dérivable à gauche en** x_0 s'il existe un réel ℓ_2 tel que

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_2.$$

On note alors $f'_g(x_0) = \ell_2$.

PROPOSITION 1 — Lien entre les trois dérivabilités

Soit f définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \iff \begin{cases} f \text{ est dérivable à droite en } x_0, \\ f \text{ est dérivable à gauche en } x_0, \\ f'_d(x_0) = f'_g(x_0). \end{cases}$$

Dans ce cas : $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

EXEMPLE 3 — Comment étudier un point de raccordement

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} (x+3)^3 + 2, & x \geq -2, \\ -(x+3)^2 + 4, & x < -2. \end{cases}$$

Étudions la dérivabilité de f en $x_0 = -2$.

Étape 1 : Calculer $f(-2)$. Comme $-2 \geq -2$: $f(-2) = 1^3 + 2 = 3$.

Étape 2 : Dérivabilité à gauche (on utilise l'expression valable pour $x < -2$) :

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{-(x+3)^2 + 4 - 3}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{-[(x+3)^2 - 1]}{x + 2}.$$

Or $(x+3)^2 - 1 = (x+3-1)(x+3+1) = (x+2)(x+4)$, d'où

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{-(x+2)(x+4)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} -(x+4) = -2.$$

Donc f est dérivable à gauche en -2 et $f'_g(-2) = -2$.

Étape 3 : Dérivabilité à droite (expression valable pour $x > -2$) :

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{(x+3)^3 + 2 - 3}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{(x+3)^3 - 1}{x + 2}.$$

Avec $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ où $a = x+3$ et $b = 1$:

$$(x+3)^3 - 1 = (x+2)[(x+3)^2 + (x+3) + 1],$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} [(x+3)^2 + (x+3) + 1] = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Donc f est dérivable à droite en -2 et $f'_d(-2) = 3$.

Conclusion : $f'_g(-2) = -2 \neq 3 = f'_d(-2)$: la fonction f n'est pas dérivable en -2 .

DÉFINITION 3 — Point anguleux

Si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 avec $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$, alors f n'est pas dérivable en x_0 et le point $A(x_0; f(x_0))$ est appelé **point anguleux** de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

PROPRIÉTÉ 2 — Interprétation géométrique des dérivées à droite et à gauche

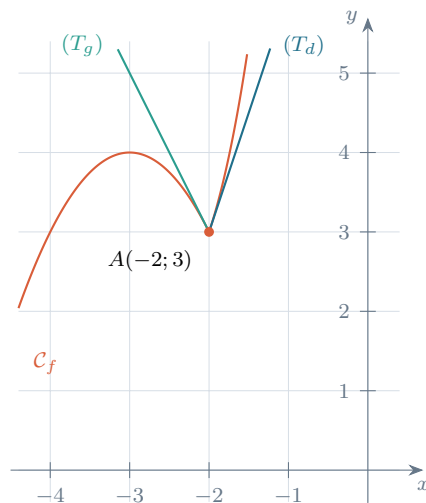
Avec les notations précédentes, la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet au point $A(x_0; f(x_0))$:

- une **demi-tangente à droite** d'équation $\begin{cases} y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}$
- une **demi-tangente à gauche** d'équation $\begin{cases} y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \leq x_0 \end{cases}$

EXEMPLE 4 — Les deux demi-tangentes de l'exemple précédent

Au point $A(-2; 3)$:

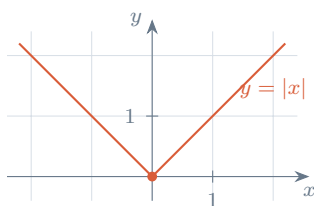
$$(T_g) : \begin{cases} y = -2(x + 2) + 3 = -2x - 1 \\ x \leq -2 \end{cases} \quad (T_d) : \begin{cases} y = 3(x + 2) + 3 = 3x + 9 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

**EXEMPLE 5 — La fonction valeur absolue**

Soit $f(x) = |x|$. On a $f(0) = 0$ et

$$f'_g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1, \quad f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1.$$

Comme $-1 \neq 1$, la fonction $x \mapsto |x|$ **n'est pas dérivable en 0** : l'origine $O(0; 0)$ est un point anguleux de sa courbe.

**Cas d'une limite infinie : demi-tangente verticale****PROPRIÉTÉ 3 — Demi-tangente verticale**

Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 et continue en x_0 .

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty,$$

alors f **n'est pas dérivable à droite** en x_0 , mais (C_f) admet au point $A(x_0; f(x_0))$ une **demi-tangente verticale** (d'équation $x = x_0, x \geq x_0$), dirigée vers le haut si la limite vaut $+\infty$ et vers le bas si elle vaut $-\infty$.

Énoncé analogue à gauche.

EXEMPLE 6 — Deux demi-tangentes verticales

a) Soit $g(x) = \sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$. On a $g(0) = 0$ et

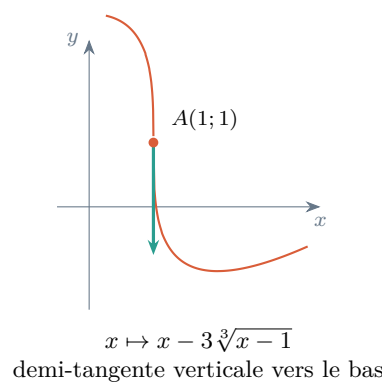
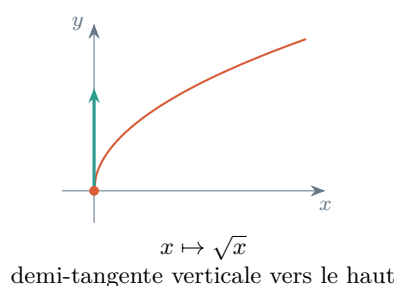
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Donc g n'est pas dérivable à droite en 0 et sa courbe admet à l'origine une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

b) Soit $h(x) = x - 3\sqrt[3]{x-1}$. On a $h(1) = 1$ et, pour $x > 1$,

$$\frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = \frac{x - 1}{x - 1} - 3 \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x - 1} = 1 - \frac{3}{(\sqrt[3]{x-1})^2} \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} -\infty,$$

car $(\sqrt[3]{x-1})^2 \rightarrow 0^+$. Donc h n'est pas dérivable à droite en 1 : sa courbe admet au point $A(1; 1)$ une demi-tangente verticale dirigée vers le bas.



La limite	La dérivabilité	Interprétation géométrique
$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$	f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$	(C_f) admet en $A(x_0; f(x_0))$ une tangente d'équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_1$	f est dérivable à droite en x_0 et $f'_d(x_0) = \ell_1$	(C_f) admet en A une demi-tangente d'équation $y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ avec $x \geq x_0$
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_2$	f est dérivable à gauche en x_0 et $f'_g(x_0) = \ell_2$	(C_f) admet en A une demi-tangente d'équation $y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ avec $x \leq x_0$
$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$	f n'est pas dérivable de ce côté	(C_f) admet en A une demi-tangente verticale $x = x_0$

APPLICATION 2

- Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \begin{cases} x\sqrt{x}, & x \geq 0, \\ 1 - \cos x, & x < 0. \end{cases}$ Étudier la dérivabilité de g en 0 et interpréter géométriquement.
- Étudier la dérivabilité de $f : x \mapsto \sqrt{x-2}$ à droite en 2 et interpréter le résultat.

SOLUTION 2

1) On a $g(0) = 0$ (les deux expressions donnent bien 0 en 0).

• **À droite** : pour $x > 0$, $\frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{x\sqrt{x}}{x} = \sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$, donc $g'_d(0) = 0$.

• **À gauche** : pour $x < 0$,

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{1 - \cos x}{x} = \frac{1 - \cos x}{x^2} \times x \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2} \times 0 = 0,$$

donc $g'_g(0) = 0$.

Comme $g'_d(0) = g'_g(0) = 0$, la fonction g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$: la courbe $\mathcal{C}_g$ admet à l'origine une **tangente horizontale**.

2) $f(2) = 0$ et, pour $x > 2$,

$$\frac{\sqrt{x-2} - 0}{x-2} = \frac{1}{\sqrt{x-2}} \xrightarrow{x \rightarrow 2^+} +\infty.$$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 2 ; sa courbe admet au point $A(2;0)$ une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

1.3 Fonction dérivée — dérivées usuelles

DÉFINITION 4 — Dérivabilité sur un intervalle

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- Si I est un intervalle ouvert, on dit que f est **dérivable sur** I si elle est dérivable en tout point de I .
- f est dérivable sur $[a; b]$ si elle est dérivable sur $]a; b[$, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b .

La fonction qui à tout x de I associe le nombre dérivé $f'(x)$ s'appelle la **fonction dérivée** de f :

$$f' : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

PROPRIÉTÉ 4 — Tableau des dérivées usuelles

La fonction f	La fonction f'	Domaine de dérivabilité
$x \mapsto a \quad (a \in \mathbb{R})$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto ax \quad (a \in \mathbb{R})$	$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \frac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \tan x$	$x \mapsto 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$
$x \mapsto \sin(ax + b)$	$x \mapsto a \cos(ax + b)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(ax + b)$	$x \mapsto -a \sin(ax + b)$	$\mathbb{R}$

REMARQUE 2 — Dérivées successives

Si f' est elle-même dérivable sur I , sa dérivée est notée f'' et s'appelle la **dérivée seconde** de f . Plus généralement, si f est n fois dérivable sur I ($n \in \mathbb{N}^*$), on note $f^{(n)}$ sa **dérivée d'ordre n** :

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(n)} = (f^{(n-1)})'.$$

Exemple. Pour $f(x) = x^3 + 5x^2 + 6x$:

$$f'(x) = 3x^2 + 10x + 6, \quad f''(x) = 6x + 10, \quad f'''(x) = 6, \quad f^{(4)} = 0.$$

1.4 Dérivabilité et continuité

PROPOSITION 2 — Toute fonction dérivable est continue

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.

$$f \text{ dérivable en } x_0 \implies f \text{ continue en } x_0.$$

Par conséquent : *toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I .*

EXEMPLE 7 — Démonstration

Supposons f dérivable en x_0 . Pour $x \neq x_0$ on peut écrire

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \times (x - x_0).$$

Quand $x \rightarrow x_0$, le premier facteur tend vers $f'(x_0)$ (réel) et le second vers 0. Donc

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = f'(x_0) \times 0 = 0,$$

c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$: f est continue en x_0 . ■

REMARQUE 3 — La réciproque est fautive

Une fonction peut être continue en un point sans y être dérivable. Ainsi $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais n'y est pas dérivable ($f'_g(0) = -1 \neq 1 = f'_d(0)$).

De même $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue à droite en 0 mais n'y est pas dérivable à droite.

À retenir. dérivable $\implies$ continue continue $\not\implies$ dérivable

1.5 Opérations sur les fonctions dérivables**PROPRIÉTÉ 5 — Opérations algébriques**

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $f + g$, αf , $f \times g$ et f^n ($n \in \mathbb{N}^*$) sont dérivables sur I et

$$(f + g)' = f' + g', \quad (\alpha f)' = \alpha f', \quad (f \cdot g)' = f'g + fg', \quad (f^n)' = n f' f^{n-1}.$$

Si de plus g ne s'annule pas sur I , alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur I et

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}, \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Enfin, si f est **strictement positive** sur I , alors $\sqrt{f}$ est dérivable sur I et

$$(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}.$$

REMARQUE 4

Avant de dériver, il ne faut jamais oublier de **justifier** que la fonction est bien définie et dérivable sur l'intervalle considéré : c'est la première ligne attendue dans une rédaction.

EXEMPLE 8 — Comment rédiger le calcul d'une fonction dérivée

Soit f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} + x\sqrt{x}$.

Étape 1 : Justifier la dérivabilité. Les fonctions $u : x \mapsto \frac{1}{x}$, $v : x \mapsto x$ et $w : x \mapsto \sqrt{x}$ sont

dérivables sur $]0; +\infty[$. Donc $f = u + v \times w$ est dérivable sur $]0; +\infty[$.

Étape 2 : Appliquer les formules. Pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \underbrace{1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}}}_{(v w)'} = -\frac{1}{x^2} + \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2}.$$

Étape 3 : Simplifier.

$$(\forall x \in]0; +\infty[) \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{3\sqrt{x}}{2}$$

EXEMPLE 9 — Une racine carrée

Déterminons la fonction dérivée de $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$.

• **Domaine.** Le discriminant de $x^2 - x + 1$ est $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, donc $x^2 - x + 1 > 0$ pour tout réel $x : D_f = \mathbb{R}$.

• **Dérivabilité.** $u : x \mapsto x^2 - x + 1$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc $f = \sqrt{u}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

• **Calcul.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}.$$

APPLICATION 3

Dans chacun des cas suivants, étudier la dérivabilité de f sur l'intervalle I puis déterminer sa fonction dérivée.

- 1) $f(x) = \sqrt{x} + x^5 ; I =]0; +\infty[$.
- 2) $f(x) = (5x + 2) \cos x ; I = \mathbb{R}$.
- 3) $f(x) = \frac{5x + 1}{x + 2} ; I =]-2; +\infty[$.
- 4) $f(x) = (2x - 3)^8 ; I = \mathbb{R}$.
- 5) $f(x) = x^2 \cos x ; I = \mathbb{R}$.
- 6) $f(x) = \tan x ; I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.

SOLUTION 3

1) Somme de deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[: f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 5x^4$.

2) Produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = 5 \cos x + (5x + 2)(-\sin x) = 5 \cos x - (5x + 2) \sin x.$$

3) Quotient de deux fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant pas sur $] -2; +\infty[:$

$$f'(x) = \frac{5(x + 2) - (5x + 1) \times 1}{(x + 2)^2} = \frac{9}{(x + 2)^2}.$$

4) Avec $u(x) = 2x - 3$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(u^8)' = 8u'u^7$:

$$f'(x) = 8 \times 2 \times (2x - 3)^7 = 16(2x - 3)^7.$$

5) Produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = 2x \cos x - x^2 \sin x.$$

6) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, et $\cos x \neq 0$ sur I :

$$f'(x) = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

1.6 Dérivée d'une fonction composée

PROPOSITION 3 — Dérivée de $v \circ u$

Soient I et J deux intervalles ouverts, $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $v : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $u(I) \subset J$, et $x_0 \in I$.

► Si u est dérivable en x_0 et v dérivable en $u(x_0)$, alors $v \circ u$ est dérivable en x_0 et

$$(v \circ u)'(x_0) = v'(u(x_0)) \times u'(x_0).$$

► Si u est dérivable sur I et v dérivable sur $u(I)$, alors $v \circ u$ est dérivable sur I et

$$(\forall x \in I) \quad (v \circ u)'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$$

EXEMPLE 10 — Comment dériver une composée

Étudions la dérivabilité de $U : x \mapsto \cos(\sqrt{x^2 + 5})$ sur $\mathbb{R}$.

Étape 1 : Décomposer. On pose $u(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ et $v(x) = \cos x$, de sorte que $U = v \circ u$.

Étape 2 : Justifier. $x \mapsto x^2 + 5$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc u est dérivable sur $\mathbb{R}$; v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Donc U est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Étape 3 : Calculer. $u'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 5}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}}$ et $v'(x) = -\sin x$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$U'(x) = v'(u(x)) \times u'(x) = -\sin(\sqrt{x^2 + 5}) \times \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}} = \frac{-x \sin(\sqrt{x^2 + 5})}{\sqrt{x^2 + 5}}.$$

EXEMPLE 11 — Une composée avec la tangente

Soit V définie sur $]1; 2[$ par $V(x) = \tan\left(\frac{\pi}{x}\right)$.

On pose $u(x) = \frac{\pi}{x}$ et $v(x) = \tan x$. La fonction u est dérivable sur $]1; 2[$ et $u(]1; 2[) = \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[$, intervalle sur lequel v est dérivable. Donc V est dérivable sur $]1; 2[$ et, pour tout $x \in]1; 2[$:

$$V'(x) = v'(u(x)) \times u'(x) = \left(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{x}\right)\right) \times \left(-\frac{\pi}{x^2}\right) = -\frac{\pi}{x^2} \left(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{x}\right)\right).$$

PROPRIÉTÉ 6 — Conséquences à connaître par cœur

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$(u^n)' = n u' u^{n-1}, \quad (\sin u)' = u' \cos u, \quad (\cos u)' = -u' \sin u.$$

Si de plus u est **strictement positive** sur I :

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

Si u ne s'annule pas sur I :

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}.$$

APPLICATION 4

1) Montrer que $f : x \mapsto \sin(x \cos x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis déterminer f' .

2) Montrer que $g : x \mapsto \cos(x^3)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis déterminer g' .

3) Soit h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

a) Étudier la continuité et la dérivabilité de h en 0.

b) Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $h'(x)$.

SOLUTION 4

1) $u : x \mapsto x \cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (produit) et $u'(x) = \cos x - x \sin x$. Donc $f = \sin \circ u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = u'(x) \cos(u(x)) = (\cos x - x \sin x) \cos(x \cos x).$$

2) $u : x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, $u'(x) = 3x^2$, donc

$$g'(x) = -u'(x) \sin(u(x)) = -3x^2 \sin(x^3).$$

3.a) *Continuité.* Pour $x \neq 0$, $\left|x^2 \sin \frac{1}{x}\right| \leq x^2$, et $x^2 \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0 = h(0)$: h est continue en 0.

Dérivabilité. Pour $x \neq 0$,

$$\left| \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} \right| = \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0,$$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x} = 0$: h est dérivable en 0 et $h'(0) = 0$.

3.b) Sur $\mathbb{R}^*$, h est un produit et une composée de fonctions dérivables. Pour tout $x \neq 0$:

$$h'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cos \frac{1}{x} = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Remarque. On notera que h' n'a pas de limite en 0 : une fonction peut être dérivable partout sans que sa dérivée soit continue.

1.7 Dérivée d'une fonction réciproque

PROPOSITION 4 — Dérivée de f^{-1} en un point

Soit f une fonction continue et **strictement monotone** sur un intervalle I , et $x_0 \in I$.

Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

PROPOSITION 5 — Dérivée de f^{-1} sur un intervalle

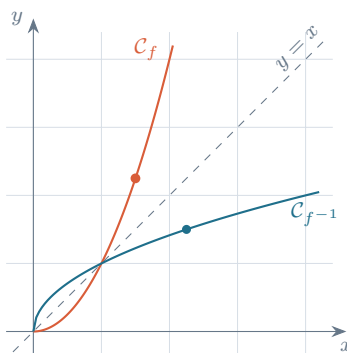
Soit f continue et strictement monotone sur un intervalle I .

Si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I , alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ et

$$(\forall x \in J) \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

REMARQUE 5

Les courbes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice (Δ) : $y = x$. La formule ci-dessus traduit simplement le fait que cette symétrie échange les coefficients directeurs m et $\frac{1}{m}$ des tangentes : une tangente horizontale devient verticale, et réciproquement.



EXEMPLE 12 — Comment calculer $(f^{-1})'(y_0)$

Soit f définie sur $I = [2; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x}}$.

Étape 1 : Dérivabilité et sens de variation. En écrivant $f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$, f est dérivable sur I et

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{x-2}{2x\sqrt{x}}.$$

Pour $x > 2$ on a $f'(x) > 0$, donc f est **strictement croissante** sur I .

Étape 2 : Existence de f^{-1} . f est continue et strictement croissante sur I , donc elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur

$$J = f(I) = \left[f(2); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[= [2\sqrt{2}; +\infty[.$$

Étape 3 : Domaine de dérivabilité de f^{-1} . f' ne s'annule pas sur $]2; +\infty[$, donc f^{-1} est dérivable sur $]2\sqrt{2}; +\infty[$.

Étape 4 : Calcul de $(f^{-1})'(3)$. Cherchons $\beta = f^{-1}(3)$, c'est-à-dire l'unique réel de $]2; +\infty[$ tel que $f(\beta) = 3$:

$$\sqrt{\beta} + \frac{2}{\sqrt{\beta}} = 3 \iff (\sqrt{\beta})^2 - 3\sqrt{\beta} + 2 = 0 \iff (\sqrt{\beta} - 1)(\sqrt{\beta} - 2) = 0.$$

Or $\sqrt{\beta} > \sqrt{2} > 1$, donc $\sqrt{\beta} - 1 \neq 0$ et $\sqrt{\beta} = 2$, d'où $\beta = 4$.

Comme $f'(4) = \frac{4-2}{2 \times 4 \times 2} = \frac{1}{8}$, on obtient :

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(f^{-1}(3))} = \frac{1}{f'(4)} = 8.$$

EXEMPLE 13 — Un cas polynomial

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x + 3$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$: f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, on a $J = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

De plus $f(1) = 1 + 1 + 3 = 5$ et $f'(1) = 4 \neq 0$, donc f^{-1} est dérivable en 5 et

$$(f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}.$$

APPLICATION 5

1) Soit f définie sur $[-2; +\infty[$ par $f(x) = x^2 + 4x + 5$.

- a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
- b) Déterminer l'intervalle sur lequel f^{-1} est dérivable puis calculer $(f^{-1})'(x)$.

2) Soit g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

- a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $J = [1; +\infty[$.
- b) Calculer $g(\sqrt{3})$, puis montrer que g^{-1} est dérivable en 2 et calculer $(g^{-1})'(2)$.

SOLUTION 5

1.a) f est dérivable sur $[-2; +\infty[$ et $f'(x) = 2x + 4 = 2(x + 2) \geq 0$, avec égalité seulement en -2 . Donc f est continue et strictement croissante sur $[-2; +\infty[$: elle admet une réciproque f^{-1} définie sur

$$J = f([-2; +\infty[) = [f(-2); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= [1; +\infty[.$$

1.b) f' ne s'annule pas sur $]-2; +\infty[$, donc f^{-1} est dérivable sur $]1; +\infty[$. En écrivant $f(x) = (x+2)^2 + 1$, on obtient pour $x \geq 1$: $f^{-1}(x) = -2 + \sqrt{x-1}$. Par suite, pour $x > 1$:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{2(-2 + \sqrt{x-1} + 2)} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}.$$

2.a) $u : x \mapsto x^2 + 1$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}^+$, donc $g = \sqrt{u}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et

$g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Pour $x > 0$, $g'(x) > 0$: g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc $J = g(\mathbb{R}^+) = [g(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)[= [1; +\infty[$ et g admet une réciproque g^{-1} définie sur J .

2.b) $g(\sqrt{3}) = \sqrt{3+1} = 2$, donc $g^{-1}(2) = \sqrt{3}$. Comme $g'(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0$, la fonction g^{-1} est dérivable en 2 et

$$(g^{-1})'(2) = \frac{1}{g'(\sqrt{3})} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

1.8 Dérivée de la fonction racine n -ième

PROPOSITION 6 — Dérivée de la racine n -ième

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

► La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$(\forall x > 0) \quad (\sqrt[n]{x})' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

► Si u est dérivable et **strictement positive** sur un intervalle I , alors $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est dérivable sur I et

$$(\forall x \in I) \quad (\sqrt[n]{u(x)})' = \frac{u'(x)}{n (\sqrt[n]{u(x)})^{n-1}}$$

EXEMPLE 14 — Démonstration du premier point

La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est la fonction réciproque de $f : x \mapsto x^n$ définie sur $\mathbb{R}^+$.

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $f'(x) = nx^{n-1}$ ne s'annule pas sur $]0; +\infty[$. D'après le théorème de dérivation de la fonction réciproque, f^{-1} est dérivable sur $f(]0; +\infty[) =]0; +\infty[$ et, pour tout $x > 0$:

$$(\sqrt[n]{x})' = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{n (\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}. \quad \blacksquare$$

EXEMPLE 15 — Deux calculs types

a) Pour tout $x > 0$:

$$(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3 \sqrt[3]{x^2}}.$$

b) Soit $f(x) = \sqrt[3]{8x-5}$. La fonction $u : x \mapsto 8x-5$ est dérivable et strictement positive sur $]\frac{5}{8}; +\infty[$, donc f y est dérivable et, pour tout $x > \frac{5}{8}$:

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{3 (\sqrt[3]{8x-5})^2} = \frac{8}{3 \sqrt[3]{(8x-5)^2}}.$$

APPLICATION 6

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes sur un intervalle que l'on précisera.

- 1) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$.
- 2) $g(x) = x \sqrt[3]{x^2 - x}$ sur $]1; +\infty[$.
- 3) $k(x) = \sin(\sqrt[3]{x^2 + x + 1})$.

SOLUTION 6

1) $u : x \mapsto x^2 + 1$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = \frac{2x}{3(\sqrt[3]{x^2 + 1})^2} = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}}.$$

2) $u : x \mapsto x^2 - x$ est dérivable et strictement positive sur $]1; +\infty[$, donc g est dérivable sur cet intervalle (produit) et

$$g'(x) = \sqrt[3]{x^2 - x} + x \times \frac{2x - 1}{3\sqrt[3]{(x^2 - x)^2}}.$$

3) $u : x \mapsto x^2 + x + 1$ a pour discriminant $\Delta = -3 < 0$, donc $u > 0$ sur $\mathbb{R}$; $v : x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\sin$ sur $\mathbb{R}$. Donc k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$k'(x) = \frac{2x + 1}{3\sqrt[3]{(x^2 + x + 1)^2}} \times \cos(\sqrt[3]{x^2 + x + 1}).$$

1.9 Dérivée des puissances rationnelles

PROPOSITION 7 — Dérivée de x^r et de u^r , $r \in \mathbb{Q}^*$

Soit r un nombre rationnel non nul.

► La fonction $x \mapsto x^r$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$(\forall x > 0) \quad (x^r)' = r x^{r-1}$$

► Si u est dérivable et strictement positive sur un intervalle I , alors $x \mapsto (u(x))^r$ est dérivable sur I et

$$(\forall x \in I) \quad ((u(x))^r)' = r u'(x) (u(x))^{r-1}$$

EXEMPLE 16 — Une puissance négative

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - x + 5)^{-\frac{7}{8}}$.

La fonction $u : x \mapsto x^2 - x + 5$ a pour discriminant $\Delta = 1 - 20 = -19 < 0$, donc u est strictement positive sur $\mathbb{R}$; elle y est de plus dérivable. Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = -\frac{7}{8} (2x - 1) (x^2 - x + 5)^{-\frac{7}{8}-1} = -\frac{7}{8} (2x - 1) (x^2 - x + 5)^{-\frac{15}{8}} = \frac{-7(2x - 1)}{8\sqrt[8]{(x^2 - x + 5)^{15}}}.$$

APPLICATION 7

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer un intervalle sur lequel elle est dérivable, puis calculer sa fonction dérivée.

- 1) $f(x) = (3 - \cos 2x)^{\frac{4}{3}}$ sur $\mathbb{R}$.
- 2) $g(x) = (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})^{-\frac{3}{5}}$ sur $]0; +\infty[$.
- 3) $h(x) = (2 + \sin(4x))^{\frac{5}{8}}$ sur $\mathbb{R}$.

SOLUTION 7

1) $u : x \mapsto 3 - \cos 2x$ vérifie $2 \leq u(x) \leq 4$, donc $u > 0$ sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 2 \sin 2x$. Ainsi

$$f'(x) = \frac{4}{3} \times 2 \sin(2x) \times (3 - \cos 2x)^{\frac{1}{3}} = \frac{8}{3} \sin(2x) \sqrt[3]{3 - \cos 2x}.$$

2) $u : x \mapsto \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$ est dérivable et strictement positive sur $]0; +\infty[$, et $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Donc

$$g'(x) = -\frac{3}{5} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \right) (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})^{-\frac{8}{5}}.$$

3) $u : x \mapsto 2 + \sin(4x)$ vérifie $1 \leq u(x) \leq 3$, donc $u > 0$ sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 4 \cos(4x)$. Ainsi

$$h'(x) = \frac{5}{8} \times 4 \cos(4x) \times (2 + \sin(4x))^{-\frac{3}{8}} = \frac{5 \cos(4x)}{2(2 + \sin(4x))^{\frac{3}{8}}}.$$

1.10 Dérivée et variations d'une fonction

ACTIVITÉ 2 — Lire les variations sur le signe de la dérivée

On considère la fonction f définie sur $[-1; 3]$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$.

- 1) Calculer $f'(x)$ puis résoudre l'équation $f'(x) = 0$.
- 2) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[-1; 3]$.
- 3) Que peut-on conjecturer sur les variations de f ?
- 4) Que remarque-t-on sur les tangentes à $(\mathcal{C}_f)$ aux points d'abscisses 0 et 2 ?

PROPOSITION 8 — Signe de la dérivée et sens de variation

Soit f une fonction dérivable sur un **intervalle** I .

- f est croissante sur $I \iff (\forall x \in I) f'(x) \geq 0$.
- f est décroissante sur $I \iff (\forall x \in I) f'(x) \leq 0$.
- f est constante sur $I \iff (\forall x \in I) f'(x) = 0$.

REMARQUE 6

- Ces résultats ne sont valables que sur un **intervalle**. Ainsi $x \mapsto \frac{1}{x}$ a une dérivée négative sur $\mathbb{R}^*$ sans être décroissante sur $\mathbb{R}^*$ tout entier.

- Si f' est positive sur I et ne s'y annule qu'en un nombre fini de points, alors f est **strictement croissante** sur I .
- Si f' est négative sur I et ne s'y annule qu'en un nombre fini de points, alors f est **strictement décroissante** sur I .

EXEMPLE 17 — Comment dresser un tableau de variations

Étudions les variations de $f : x \mapsto x + \frac{1+x}{1+2x}$.

Étape 1 : Domaine. $D_f =]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]-\frac{1}{2}; +\infty[$.

Étape 2 : Limites aux bornes.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^-} f(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} f(x) &= +\infty. \end{aligned}$$

Étape 3 : Dérivée. f est dérivable sur D_f (fonction rationnelle) et, pour tout $x \in D_f$:

$$f'(x) = 1 + \frac{1 \cdot (1+2x) - (1+x) \cdot 2}{(1+2x)^2} = 1 - \frac{1}{(1+2x)^2} = \frac{(1+2x)^2 - 1}{(1+2x)^2} = \frac{4x(x+1)}{(1+2x)^2}.$$

Étape 4 : Signe de f' . Le dénominateur est strictement positif, donc $f'(x)$ est du signe de $4x(x+1)$: positif à l'extérieur des racines -1 et 0 , négatif entre elles.

Étape 5 : Tableau de variations.

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	-1		$+\infty$	1

Conclusion : f est strictement croissante sur $] -\infty; -1]$ et sur $[0; +\infty[$, strictement décroissante sur $[-1; -\frac{1}{2}[$ et sur $]-\frac{1}{2}; 0]$.

1.11 Dérivée et extremums

DÉFINITION 5 — Extremum local

Soit f définie sur un intervalle I et $a \in I$.

- $f(a)$ est la **valeur maximale** de f sur I si $(\forall x \in I) f(x) \leq f(a)$.
- $f(a)$ est la **valeur minimale** de f sur I si $(\forall x \in I) f(x) \geq f(a)$.

On parle d'**extremum local** en a lorsque ces inégalités ne sont vérifiées que sur un intervalle ouvert

contenant a .

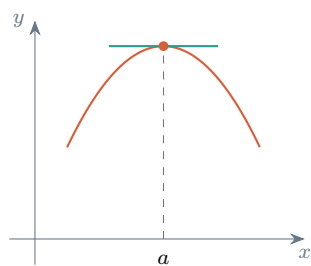
PROPOSITION 9 — Extremums et dérivée

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert** I et $a \in I$.

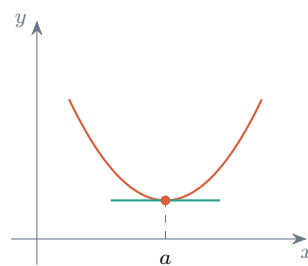
- Si f admet un extremum local en a , alors $f'(a) = 0$; la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point $A(a; f(a))$ est alors **horizontale**.
- Réciproquement, si f' s'annule en a **en changeant de signe**, alors $f(a)$ est un extremum local de f .

REMARQUE 7 — Attention à la réciproque

La condition $f'(a) = 0$ n'est **pas suffisante**. Pour $f(x) = x^3$ on a $f'(0) = 0$, mais $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ ne change pas de signe : f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et n'admet aucun extremum. Le point $O(0;0)$ est ici un point d'inflexion à tangente horizontale.



f admet un maximum en a



f admet un minimum en a

EXEMPLE 18 — Utiliser un extremum pour démontrer une inégalité

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 5$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x - 2 = 2(x - 1)$, qui s'annule en 1 en changeant de signe.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	$+\infty$	4	$+\infty$

La fonction f admet donc un **minimum** en 1, égal à $f(1) = 1 - 2 + 5 = 4$. Par conséquent

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x^2 - 2x + 5 \geq 4$$

APPLICATION 8

- 1) Étudier les variations de $f : x \mapsto x^3 - 3x$ sur $\mathbb{R}$ et préciser ses extremums locaux.
- 2) Étudier les variations de $g : x \mapsto \frac{-3x}{x^2 + x + 1}$ sur $\mathbb{R}$.

SOLUTION 8

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$, qui s'annule en -1 et 1 .

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$			2		$+\infty$	
	$-\infty$			-2		

f admet un maximum local $f(-1) = 2$ et un minimum local $f(1) = -2$.

2) Le trinôme $x^2 + x + 1$ a pour discriminant $\Delta = -3 < 0$: il ne s'annule pas et $D_g = \mathbb{R}$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$g'(x) = \frac{-3(x^2 + x + 1) - (-3x)(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{-3x^2 - 3x - 3 + 6x^2 + 3x}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{3(x^2 - 1)}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

Donc $g'(x)$ est du signe de $x^2 - 1$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$			3		0	
	0			-1		

En effet $g(-1) = \frac{3}{1 - 1 + 1} = 3$, $g(1) = \frac{-3}{3} = -1$, et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$.

1.12 Calculer une limite à l'aide du nombre dérivé

RAPPEL — La méthode

Lorsqu'une limite se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ et s'écrit

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

il suffit de **reconnaître la fonction** f et de calculer $f'(a)$: la limite cherchée vaut exactement $f'(a)$.

EXEMPLE 19 — Quatre limites classiques

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$. Avec $f(x) = \sqrt[3]{x}$ on a $f(1) = 1$ et $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, donc la limite vaut $f'(1) = \frac{1}{3}$.
- b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$. Avec $f(x) = \tan x$ on a $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ et $f'(x) = 1 + \tan^2 x$, donc la limite vaut $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + 1 = 2$.
- c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}}{x - \frac{\pi}{6}}$. Avec $f(x) = \cos x$ on a $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $f'(x) = -\sin x$, donc la limite vaut $-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.
- d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^5 - x)^{100} - 1}{x - 1}$. Avec $f(x) = (2x^5 - x)^{100}$ on a $f(1) = 1$ et $f'(x) = 100(10x^4 - 1)(2x^5 - x)^{99}$, donc la limite vaut $f'(1) = 100 \times 9 \times 1 = 900$.

APPLICATION 9

Calculer les limites suivantes en utilisant un nombre dérivé.

- 1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{x - 1}$.
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x}$.
- 3) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$.

SOLUTION 9

- 1) $f(x) = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$, $f(1) = 1$ et $f'(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$, donc la limite vaut $f'(1) = \frac{1}{4}$.
- 2) $f(x) = \sin(3x)$, $f(0) = 0$ et $f'(x) = 3\cos(3x)$, donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) - \sin 0}{x - 0} = f'(0) = 3.$$
- 3) $f(x) = \sqrt{x}$, $f(4) = 2$ et $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, donc la limite vaut $f'(4) = \frac{1}{4}$.

Devoir à la maison**DEVOIR 1 — Synthèse du chapitre**

Exercice 1. ★★ Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1, \\ 3x - 1, & x < 1. \end{cases}$$

- 1) Montrer que f est continue en 1.
- 2) Étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 1.
- 3) Que peut-on en conclure ? Interpréter géométriquement.

Exercice 2. ★★★ Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes sur un intervalle à préciser.

1) $f(x) = \frac{3x-1}{x^2+1}$.

2) $g(x) = \sqrt{x^2+4x+5}$.

3) $h(x) = (x^3+x^2+3x)^6$.

4) $k(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$ sur $]1; +\infty[$.

Exercice 3. ★★★ Soit g définie sur $[1; +\infty[$ par $g(x) = x^3 - 3x - 3$.

1) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1; +\infty[$, puis que $2 < \alpha < 3$.

3) Montrer que $(g^{-1})'(0) = \frac{1}{3(\alpha^2-1)}$.

Exercice 4. ★★★ Soit f définie sur $[-1; +\infty[$ par $f(x) = x - \sqrt[3]{x+1}$.

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2) Étudier la dérivabilité de f à droite en -1 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-1; +\infty[$, puis dresser le tableau de variations de f .