

Informations du document

Niveau	Deuxième année du Baccalauréat
Filière	Sciences Physiques (PC)
Année scolaire	2026–2027
Établissement	Lycée Technique Settat

IDENTITÉ DU PROFESSEUR

Khalid Legdani

Professeur d'enseignement secondaire qualifiant

Discipline	Mathématiques
Téléphone	+212 7 08 27 07 29
Site web	www.lyceemaroc.com

Table des matières

Étude des fonctions

RAPPEL — Ce que le chapitre vise**Capacités exigibles**

- Reconnaître et déterminer une asymptote verticale, horizontale ou oblique.
- Étudier la position relative d'une courbe et de son asymptote.
- Reconnaître une branche parabolique et préciser sa direction.
- Étudier la concavité d'une courbe et déterminer ses points d'inflexion.
- Montrer qu'une droite est axe de symétrie, qu'un point est centre de symétrie, et en déduire le domaine d'étude.
- Mener l'étude complète d'une fonction et construire sa courbe.

Prérequis

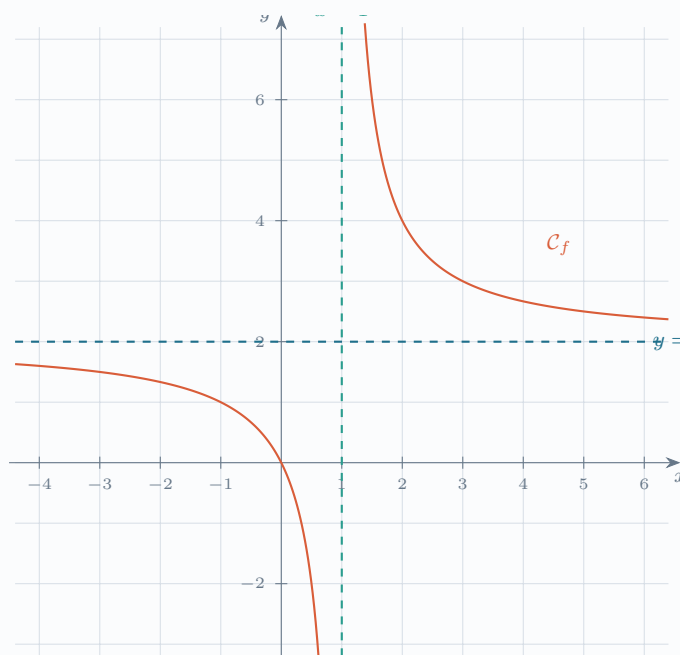
- Limites d'une fonction numérique.
- Continuité (chapitre 01) et théorème des valeurs intermédiaires.
- Dérivation (chapitre 02) : variations, extrema, dérivée seconde.
- Fonction réciproque et symétrie par rapport à la première bissectrice.

Dans tout le chapitre, le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et $(\mathcal{C}_f)$ désigne la courbe représentative de la fonction f .

1.1 Asymptote verticale, asymptote horizontale

ACTIVITÉ 1 — Lire deux asymptotes sur une courbe

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x}{x-1}$, de courbe $(\mathcal{C}_f)$.



- 1) Déterminer D_f .
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Que constate-t-on sur la figure ?
- 3) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$. Que constate-t-on ?

SOLUTION 1

- 1) $x \in D_f \iff x - 1 \neq 0 \iff x \neq 1$, donc $D_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$.
- 2) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x} = 2$. La courbe se rapproche de la droite horizontale d'équation $y = 2$.
- 3) Le numérateur tend vers $2 \neq 0$; pour $x > 1$ on a $x - 1 \rightarrow 0^+$ et pour $x < 1$, $x - 1 \rightarrow 0^-$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty.$$

La courbe se rapproche de la droite verticale d'équation $x = 1$.

DÉFINITION 1 — Asymptote verticale

Soit a un réel. Si

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty,$$

on dit que la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe (C_f) .

DÉFINITION 2 — Asymptote horizontale

Soit b un réel. Si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \quad (\text{resp. } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b),$$

on dit que la droite d'équation $y = b$ est une **asymptote horizontale** à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$).

REMARQUE 1

- Une asymptote verticale se cherche **aux bornes finies exclues** du domaine : valeurs interdites d'un quotient, bornes d'un intervalle ouvert.
- Une asymptote horizontale se cherche **en $-\infty$ et en $+\infty$** , séparément : une courbe peut avoir une asymptote horizontale d'un côté seulement.
- Contrairement à l'asymptote verticale, une courbe **peut couper** son asymptote horizontale ou oblique.

EXEMPLE 1 — Comment rédiger la recherche des asymptotes

Soit $f(x) = \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 - 4}$.

Étape 1 : Domaine. $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$, donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.

Étape 2 : Aux bornes finies. En 2 : le numérateur tend vers $3 \times 4 + 2 - 2 = 12 \neq 0$ et $x^2 - 4 \rightarrow 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$: la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale. De même $x = -2$ est asymptote verticale.

Étape 3 : À l'infini.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3.$$

Conclusion : La droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.

APPLICATION 1

- 1) Soit $f(x) = 5 + \frac{x}{x^2 + 3}$. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, puis interpréter graphiquement.
- 2) Soit $g(x) = \frac{x + 1}{(x - 4)^2}$. Montrer que la droite d'équation $x = 4$ est une asymptote verticale à la courbe de g .

SOLUTION 2

1) $x^2 + 3 > 0$ donc $D_f = \mathbb{R}$, et

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

d'où $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 5$. La droite d'équation $y = 5$ est asymptote horizontale à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.

2) $D_g = \mathbb{R} \setminus \{4\}$. Le numérateur tend vers $5 > 0$ et $(x - 4)^2 \rightarrow 0^+$, donc

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x + 1}{(x - 4)^2} = +\infty.$$

La droite d'équation $x = 4$ est donc une asymptote verticale à la courbe de g .

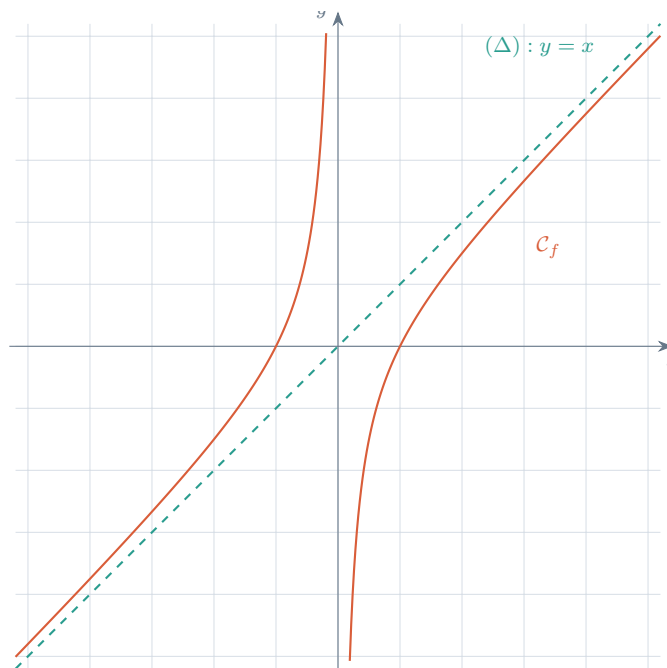
1.2 Asymptote oblique

DÉFINITION 3 — Asymptote oblique

Soient a et b deux réels avec $a \neq 0$. Si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \quad (\text{resp. } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0),$$

on dit que la droite (Δ) d'équation $y = ax + b$ est une **asymptote oblique** à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$).

**PROPRIÉTÉ 1 — Comment trouver a et b**

Soit f telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$. Si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad (a \in \mathbb{R}^*) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = b \quad (b \in \mathbb{R}),$$

alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$. Énoncé analogue en $-\infty$.

REMARQUE 2 — Deux situations, deux méthodes

- **La droite est donnée** (« montrer que $y = 2x - 1$ est asymptote ») : on calcule directement $\lim [f(x) - (2x - 1)]$ et on vérifie qu'elle vaut 0. C'est le plus rapide.
- **La droite est à trouver** : on calcule successivement $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$.
- Pour une **fraction rationnelle** dont le degré du numérateur vaut celui du dénominateur *plus un*, la division euclidienne donne l'asymptote d'un seul coup.

EXEMPLE 2 — Méthode 1 : la droite est donnée

Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 8}{x - 3}$. Montrons que $(\Delta) : y = 2x - 1$ est asymptote

oblique à $(\mathcal{C}_f)$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

Étape 1 : Décomposer. La division euclidienne de $2x^2 - 7x + 8$ par $x - 3$ donne

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{5}{x - 3}.$$

(Vérification : $(2x - 1)(x - 3) + 5 = 2x^2 - 7x + 3 + 5 = 2x^2 - 7x + 8$.)

Étape 2 : Passer à la limite.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (2x - 1)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5}{x - 3} = 0.$$

Conclusion : La droite $(\Delta) : y = 2x - 1$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.

EXEMPLE 3 — Méthode 2 : la droite est à trouver

Soit $f(x) = \frac{3x^3 + x^2 - 1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$.

Étape 1 : Limite infinie ? $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = +\infty$. On peut donc chercher une asymptote oblique.

Étape 2 : Calcul de a .

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + x^2 - 1}{x^3} = 3 \neq 0.$$

Étape 3 : Calcul de b .

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^3 + x^2 - 1}{x^2} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) = 1.$$

Conclusion : La droite d'équation $y = 3x + 1$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ (et, par le même calcul, au voisinage de $-\infty$).

Position relative de la courbe et de son asymptote

RAPPEL — La méthode

Pour savoir si $(\mathcal{C}_f)$ est **au-dessus** ou **au-dessous** de son asymptote $(\Delta) : y = ax + b$, on étudie le **signe de la différence**

$$d(x) = f(x) - (ax + b).$$

- $d(x) > 0$: la courbe est **au-dessus** de (Δ) ;
- $d(x) < 0$: la courbe est **au-dessous** de (Δ) ;
- $d(x) = 0$: la courbe **coupe** (Δ) en ce point.

Même méthode pour une asymptote horizontale, avec $d(x) = f(x) - b$.

EXEMPLE 4 — Position relative

Reprenons $f(x) = \frac{3x^3 + x^2 - 1}{x^2} = 3x + 1 - \frac{1}{x^2}$ et $(\Delta) : y = 3x + 1$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$d(x) = f(x) - (3x + 1) = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

Conclusion : La courbe $(\mathcal{C}_f)$ est **strictement au-dessous** de (Δ) sur tout $\mathbb{R}^*$: elle ne la coupe jamais.

EXEMPLE 5 — Un cas où le signe change

Soit $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x} = x - \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$. On a

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0,$$

donc $(\Delta) : y = x$ est asymptote oblique en $-\infty$ et en $+\infty$.

De plus $d(x) = -\frac{1}{x}$, qui est du signe contraire de x :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$d(x) = -\frac{1}{x}$	+	—	—
position	dessus	dessous	dessous

Conclusion : $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de (Δ) sur $] -\infty; 0[$ et au-dessous sur $]0; +\infty[$ — c'est exactement ce que montre la figure du début de cette section.

APPLICATION 2

Soit f définie sur $]2; +\infty[$ par $f(x) = x - \frac{1}{\sqrt{x-2}}$.

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ et interpréter géométriquement.
- 2) Montrer que la droite $(\Delta) : y = x$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.
- 3) Déterminer la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et de (Δ) .

SOLUTION 3

1) Quand $x \rightarrow 2^+$, $\sqrt{x-2} \rightarrow 0^+$ donc $\frac{1}{\sqrt{x-2}} \rightarrow +\infty$ et $x \rightarrow 2$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$: la droite d'équation $x = 2$ est une **asymptote verticale** à $(\mathcal{C}_f)$.

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{x-2}}\right) = 0$, donc $(\Delta) : y = x$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

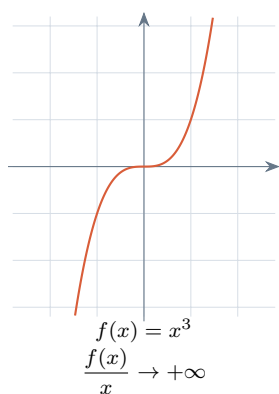
3) Pour tout $x > 2$, $d(x) = -\frac{1}{\sqrt{x-2}} < 0$: la courbe $(\mathcal{C}_f)$ est **au-dessous** de (Δ) sur tout $]2; +\infty[$.

1.3 Branches paraboliques

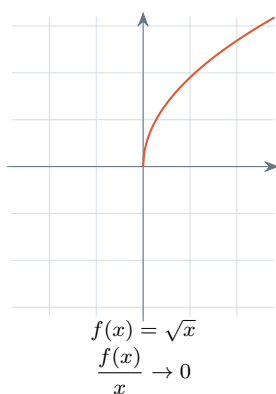
DÉFINITION 4 — Les trois branches paraboliques

Soit f telle que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty$ (en $-\infty$ ou en $+\infty$).

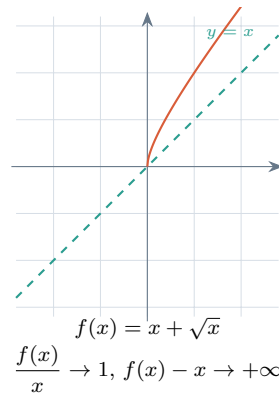
- Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, alors (C_f) admet une **branche parabolique de direction l'axe des ordonnées**.
- Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors (C_f) admet une **branche parabolique de direction l'axe des abscisses**.
- Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$ ($a \neq 0$) et $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = \pm\infty$, alors (C_f) admet une **branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$** .



direction : axe des ordonnées

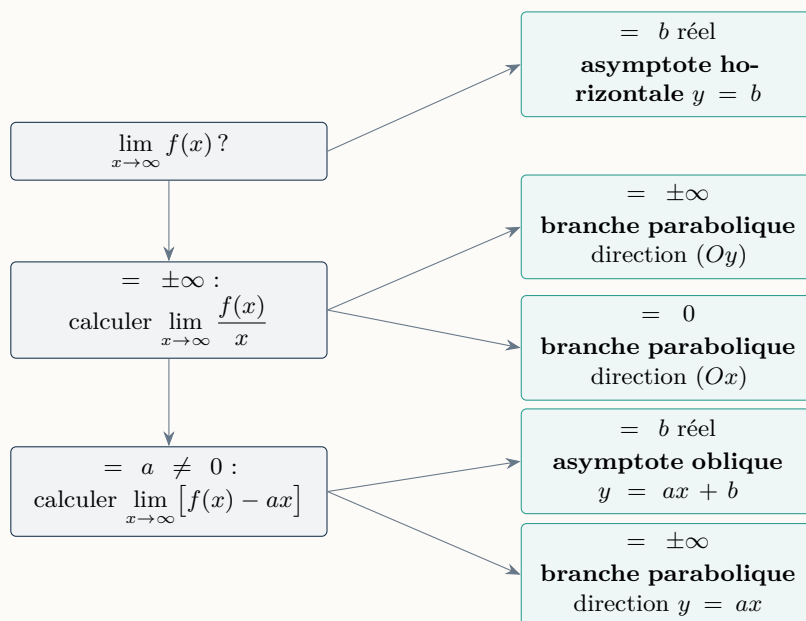


direction : axe des abscisses



direction : la droite $y = x$

RAPPEL — L'ordre des questions à se poser devant une branche infinie



EXEMPLE 6 — Comment rédiger l'étude d'une branche infinie

Étudions la nature des branches infinies de (C_f) pour $f(x) = 2x - \sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$.

Étape 1 : Limite de f . $f(x) = x \left(2 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. Il n'y a donc pas d'asymptote horizontale.

Étape 2 : Limite de $\frac{f(x)}{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = 2 = a \neq 0.$$

Étape 3 : Limite de $f(x) - ax$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\sqrt{x}) = -\infty.$$

Conclusion : (C_f) admet une **branche parabolique de direction la droite d'équation $y = 2x$** au voisinage de $+\infty$.

APPLICATION 3

Déterminer D_f puis étudier la nature des branches infinies de (C_f) dans chacun des cas suivants.

1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$

2) $f(x) = \frac{3 - 2x^2}{(1 + x)^2}$

SOLUTION 4

1) $D_f = \mathbb{R}$ (fonction polynôme).

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2x^3 = \begin{cases} +\infty & \text{en } +\infty, \\ -\infty & \text{en } -\infty. \end{cases}$$

$$\text{Puis } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2x^2 = +\infty.$$

Donc (C_f) admet une **branche parabolique de direction l'axe des ordonnées** au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.

2) $x \in D_f \iff (1 + x)^2 \neq 0 \iff x \neq -1$, donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

• En -1 : le numérateur tend vers $3 - 2 = 1 \neq 0$ et $(1 + x)^2 \rightarrow 0^+$, donc $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$: la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale.

• À l'infini :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2}{x^2} = -2,$$

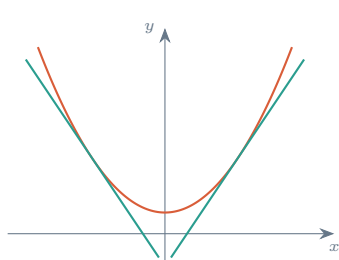
donc la droite d'équation $y = -2$ est asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.

1.4 Concavité d'une courbe et points d'inflexion

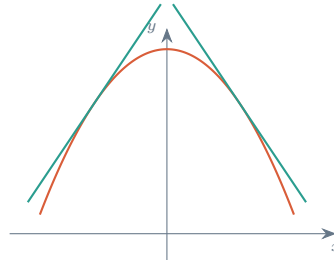
DÉFINITION 5 — Courbe convexe, courbe concave

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe.

- $(\mathcal{C}_f)$ est **convexe** sur I si, sur I , elle est entièrement **au-dessus** de chacune de ses tangentes.
- $(\mathcal{C}_f)$ est **concave** sur I si, sur I , elle est entièrement **au-dessous** de chacune de ses tangentes.



convexe : $f'' \geq 0$
la courbe est au-dessus de ses tangentes



concave : $f'' \leq 0$
la courbe est au-dessous de ses tangentes

PROPRIÉTÉ 2 — Concavité et dérivée seconde

Soit f deux fois dérivable sur un intervalle I .

$$(\mathcal{C}_f) \text{ est convexe sur } I \iff (\forall x \in I) f''(x) \geq 0,$$

$$(\mathcal{C}_f) \text{ est concave sur } I \iff (\forall x \in I) f''(x) \leq 0.$$

DÉFINITION 6 — Point d'inflexion

Soit f dérivable sur I et $x_0 \in I$. On dit que $A(x_0; f(x_0))$ est un **point d'inflexion** de $(\mathcal{C}_f)$ si la courbe **change de concavité** en A .

En un point d'inflexion, la tangente **traverse** la courbe.

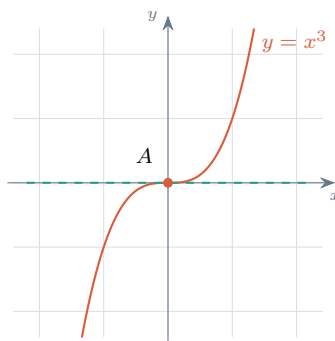
PROPRIÉTÉ 3 — Comment les trouver

Soit f deux fois dérivable sur un intervalle I et $x_0 \in I$.

Si f'' s'annule en x_0 **en changeant de signe**, alors $A(x_0; f(x_0))$ est un point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$.

REMARQUE 3 — $f''(x_0) = 0$ ne suffit pas

Pour $f(x) = x^4$, on a $f''(x) = 12x^2$ qui s'annule en 0 **sans changer de signe** : $(\mathcal{C}_f)$ reste convexe et O n'est pas un point d'inflexion. C'est bien le **changement de signe** qui compte, exactement comme pour les extremums avec f' .



$f''(x) = 6x$ change de signe en 0 :
 $O(0;0)$ est un point d'inflexion, la tangente $y = 0$ traverse la courbe

EXEMPLE 7 — Comment rédiger une étude de concavité

Étudions la concavité de $(\mathcal{C}_f)$ pour $f(x) = x^3 + x^2$.

Étape 1 : Dérivées. f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynôme) et

$$f'(x) = 3x^2 + 2x, \quad f''(x) = 6x + 2.$$

Étape 2 : Signe de f'' . $f''(x) = 0 \iff x = -\frac{1}{3}$, et f'' est du premier degré de coefficient $6 > 0$: négative avant $-\frac{1}{3}$, positive après.

Étape 3 : Tableau.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
concavité	concave	0	convexe

Conclusion : $(\mathcal{C}_f)$ est concave sur $]-\infty; -\frac{1}{3}]$ et convexe sur $[-\frac{1}{3}; +\infty[$. Comme f'' change de signe en $-\frac{1}{3}$ et que $f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27} + \frac{1}{9} = \frac{2}{27}$, le point $A\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{27}\right)$ est un **point d'inflexion** de $(\mathcal{C}_f)$.

APPLICATION 4

Étudier la concavité de la courbe de f en précisant les points d'inflexion s'ils existent.

- 1) $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - 2x^2 + 3x + 5$ sur $\mathbb{R}$.
- 2) $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

SOLUTION 5

1) f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 3, \quad f''(x) = x^2 - 4 = (x-2)(x+2).$$

Le trinôme $x^2 - 4$ est positif à l'extérieur de $[-2; 2]$, négatif à l'intérieur.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
concavité	convexe	0	concave	0	convexe

f'' change de signe en -2 et en 2 , donc $(\mathcal{C}_f)$ admet **deux points d'inflexion**, d'abscisses -2 et 2 .
On calcule

$$f(-2) = \frac{16}{12} - 8 - 6 + 5 = -\frac{23}{3}, \quad f(2) = \frac{16}{12} - 8 + 6 + 5 = \frac{13}{3}.$$

Les points d'inflexion sont donc $A\left(-2; -\frac{23}{3}\right)$ et $B\left(2; \frac{13}{3}\right)$.

2) f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

Le signe de $f''(x)$ est celui de $(x-1)^3$, c'est-à-dire celui de $x-1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	-		+
concavité	concave		convexe

$(\mathcal{C}_f)$ est concave sur $]-\infty; 1[$ et convexe sur $]1; +\infty[$. En revanche, f'' ne s'annule nulle part et $1 \notin D_f$: **la courbe n'admet aucun point d'inflexion**. Le changement de concavité se fait de part et d'autre de l'asymptote verticale $x = 1$, pas en un point de la courbe.

1.5 Éléments de symétrie d'une courbe

PROPRIÉTÉ 4 — Axe de symétrie

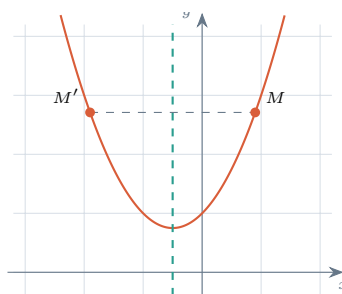
Soit f définie sur D_f et $a \in \mathbb{R}$. La droite (Δ) d'équation $x = a$ est un **axe de symétrie** de $(\mathcal{C}_f)$ si et seulement si

$$\begin{cases} (\forall x \in D_f) & (2a - x) \in D_f, \\ (\forall x \in D_f) & f(2a - x) = f(x). \end{cases}$$

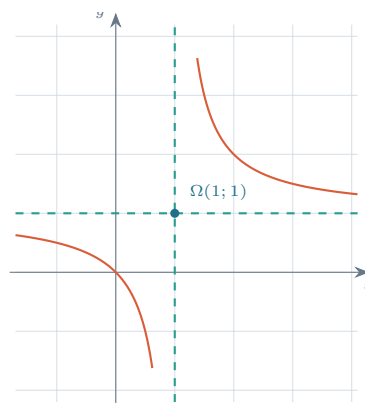
PROPRIÉTÉ 5 — Centre de symétrie

Soit f définie sur D_f et $(a; b) \in \mathbb{R}^2$. Le point $\Omega(a; b)$ est un **centre de symétrie** de $(\mathcal{C}_f)$ si et seulement si

$$\begin{cases} (\forall x \in D_f) & (2a - x) \in D_f, \\ (\forall x \in D_f) & f(2a - x) + f(x) = 2b. \end{cases}$$



$(\Delta) : x = -\frac{1}{2}$
axe de symétrie
 $f(x) = x^2 + x + 1$



centre de symétrie
 $f(x) = \frac{x}{x-1}$

REMARQUE 4 — À quoi ça sert : le domaine d'étude

Lorsqu'on a établi une symétrie, il suffit d'étudier f sur

$$D_E = D_f \cap [a; +\infty[$$

puis de compléter la courbe par la symétrie. On divise le travail par deux.

Deux cas particuliers déjà connus : si f est **paire**, l'axe des ordonnées est axe de symétrie ($a = 0$) ; si f est **impaire**, l'origine est centre de symétrie ($a = b = 0$).

EXEMPLE 8 — Comment rédiger la preuve d'un axe de symétrie

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 5}$. Montrons que la droite $(\Delta) : x = -3$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

Étape 1 : Domaine. $x^2 + 6x + 5 = (x + 1)(x + 5) \geq 0$ à l'extérieur des racines, donc

$$D_f =]-\infty; -5] \cup [-1; +\infty[.$$

Étape 2 : Stabilité du domaine. Ici $a = -3$ donc $2a - x = -6 - x$. Pour $x \in D_f$:

$$x \leq -5 \text{ ou } x \geq -1 \iff -6 - x \geq -1 \text{ ou } -6 - x \leq -5 \iff (-6 - x) \in D_f.$$

Étape 3 : Égalité des images. Pour tout $x \in D_f$:

$$f(-6 - x) = \sqrt{(-6 - x)^2 + 6(-6 - x) + 5} = \sqrt{x^2 + 12x + 36 - 36 - 6x + 5} = \sqrt{x^2 + 6x + 5} = f(x).$$

Conclusion : La droite $(\Delta) : x = -3$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$, et le domaine d'étude est

$$D_E = D_f \cap [-3; +\infty[= [-1; +\infty[.$$

EXEMPLE 9 — Comment rédiger la preuve d'un centre de symétrie

Soit $f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$. Montrons que $\Omega(-2; 3)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

Étape 1 : Domaine. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Étape 2 : Stabilité. Ici $a = -2$ donc $2a - x = -4 - x$. Pour $x \neq -2$:

$$x \neq -2 \iff -4 - x \neq -2 \iff (-4 - x) \in D_f.$$

Étape 3 : Somme des images. Pour tout $x \in D_f$:

$$f(-4 - x) = \frac{3(-4 - x) - 1}{(-4 - x) + 2} = \frac{-3x - 13}{-x - 2} = \frac{3x + 13}{x + 2},$$

donc

$$f(-4 - x) + f(x) = \frac{3x + 13}{x + 2} + \frac{3x - 1}{x + 2} = \frac{6x + 12}{x + 2} = 6 = 2 \times 3.$$

Conclusion : $\Omega(-2; 3)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$, et $D_E = D_f \cap [-2; +\infty[=] - 2; +\infty[$.

REMARQUE 5 — Un raccourci très utile

Une fraction rationnelle $\frac{ax+b}{cx+d}$ s'écrit toujours sous la forme

$$f(x) = \alpha + \frac{\beta}{cx+d}.$$

Le point $\Omega\left(-\frac{d}{c}; \alpha\right)$ — intersection des deux asymptotes — est alors son centre de symétrie. Ici $f(x) = 3 - \frac{7}{x+2}$, ce qui redonne immédiatement $\Omega(-2; 3)$.

APPLICATION 5

- 1) Montrer que la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe de $f(x) = x^2 + x + 1$.
- 2) Montrer que le point $A\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ est un centre de symétrie de la courbe de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$.

SOLUTION 6

1) $D_f = \mathbb{R}$, donc $2a - x = -1 - x \in \mathbb{R} = D_f$. De plus

$$f(-1 - x) = (-1 - x)^2 + (-1 - x) + 1 = 1 + 2x + x^2 - 1 - x + 1 = x^2 + x + 1 = f(x).$$

Les deux conditions sont vérifiées : $x = -\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie.

2) $D_f = \mathbb{R}$, donc $2a - x = 1 - x \in \mathbb{R} = D_f$. Ensuite

$$f(1 - x) = 2(1 - x)^3 - 3(1 - x)^2 + 2.$$

Or $(1 - x)^3 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3$ et $(1 - x)^2 = 1 - 2x + x^2$, donc

$$f(1 - x) = 2 - 6x + 6x^2 - 2x^3 - 3 + 6x - 3x^2 + 2 = -2x^3 + 3x^2 + 1.$$

Par suite

$$f(1-x) + f(x) = (-2x^3 + 3x^2 + 1) + (2x^3 - 3x^2 + 2) = 3 = 2 \times \frac{3}{2}.$$

Donc $A\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

Remarque. Ce point n'est pas quelconque : $f''(x) = 12x - 6$ s'annule en changeant de signe en $\frac{1}{2}$, donc A est aussi le **point d'inflexion** de la courbe. Pour une fonction polynôme du troisième degré, le point d'inflexion est toujours centre de symétrie.

1.6 Le plan d'étude complète d'une fonction

RAPPEL — Les huit étapes, dans l'ordre

1. **Domaine de définition** D_f .
2. **Éléments de symétrie** (parité, axe, centre) et réduction à D_E — à faire *tôt*, c'est ce qui allège tout le reste.
3. **Limites aux bornes** de D_E .
4. **Branches infinies** : asymptotes et branches paraboliques, avec la **position relative** par rapport aux asymptotes obliques.
5. **Dérivée** f' , son signe, le **tableau de variations** (sans oublier les limites déjà calculées).
6. **Points particuliers** : extremums, tangentes horizontales ou verticales, dérivabilité aux bornes, intersections avec les axes.
7. **Dérivée seconde** f'' : concavité et points d'inflexion.
8. **Tracé** : on place d'abord les asymptotes, puis les points particuliers avec leurs tangentes, enfin la courbe ; on complète par la symétrie s'il y en a une.

REMARQUE 6 — Les trois erreurs qui coûtent le plus de points

- ▶ Oublier de **préciser le côté** ($x \rightarrow a^+$ ou $x \rightarrow a^-$) pour une limite infinie en un point : le signe de l'infini en dépend.
- ▶ Conclure à une asymptote oblique alors que $\lim [f(x) - ax] = \pm\infty$: c'est une **branche parabolique**, pas une asymptote.
- ▶ Annoncer un point d'inflexion parce que $f''(x_0) = 0$, sans vérifier le **changement de signe**.

EXEMPLE 10 — Une étude complète rédigée de bout en bout

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$.

Étape 1 : Domaine. f est polynôme : $D_f = \mathbb{R}$.

Étape 2 : Branches infinies. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. De plus

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2x^2 = +\infty,$$

donc $(\mathcal{C}_f)$ admet une **branche parabolique de direction l'axe des ordonnées** en $-\infty$ et en $+\infty$.

Étape 3 : Variations. $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$, qui s'annule en 0 et en 1, avec $f(0) = 2$ et $f(1) = 1$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	1	$+\infty$	

f admet un maximum local $f(0) = 2$ et un minimum local $f(1) = 1$.

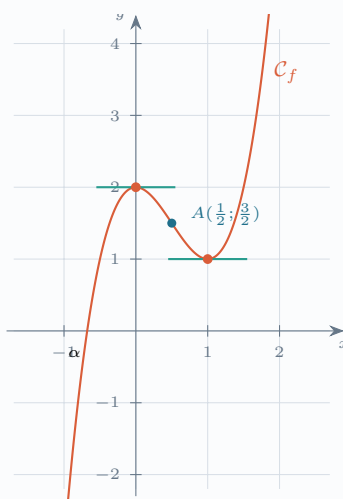
Étape 4 : Concavité. $f''(x) = 12x - 6 = 6(2x - 1)$, qui s'annule en changeant de signe en $\frac{1}{2}$, avec $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
concavité	concave		convexe

Le point $A\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ est un **point d'inflexion**, et c'est aussi le **centre de symétrie** de $(\mathcal{C}_f)$ (démontré à l'application précédente).

Étape 5 : Équation $f(x) = 0$. Sur $[-1; 0]$, f est continue et strictement croissante, avec $f(-1) = -3 < 0$ et $f(0) = 2 > 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une **unique solution** α dans $]-1; 0[$. Sur $[0; 1]$ puis $[1; +\infty[$, f reste strictement positive ($f \geq 1$) : α est donc la seule racine sur $\mathbb{R}$. Géométriquement, $(\mathcal{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses en un unique point, d'abscisse α .

Étape 6 : Tracé.



Devoir à la maison

DEVOIR 1 — Synthèse du chapitre

Exercice 1. ★★★ Déterminer D_f puis étudier la nature des branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$.

1) $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 2}$

2) $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$

3) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$

Exercice 2. ★★★ Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$.

1) Montrer que $f(x) = x - 1 + \frac{2}{x - 1}$.

2) En déduire les asymptotes de $(\mathcal{C}_f)$ et la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à l'asymptote oblique.

3) Montrer que le point $\Omega(1; 0)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

Exercice 3. ★★★ Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{3x^4 + 1}{3x^3}$.

1) Étudier la parité de f et en déduire D_E .

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et interpréter géométriquement.

3) Montrer que la droite $(D) : y = x$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$, puis étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et de (D) sur D_E .

4) Calculer $f'(x)$ sur $\mathbb{R}^*$ et dresser le tableau de variations.

Exercice 4. ★★★ Soit f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + x}$.

1) Déterminer D_f et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et interpréter géométriquement.

3) Montrer que la droite $(\Delta) : x = -\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$ et en déduire D_E .

4) Étudier la branche infinie de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.