

Notions de logique

Propositions ■ Connecteurs ■ Quantificateurs ■ Raisonnements

Informations du document

Niveau	Première année du Baccalauréat
Filière	Sciences Mathématiques
Année scolaire	2026–2027
Établissement	Lycée Technique Settat

IDENTITÉ DU PROFESSEUR

Khalid Legdani

Professeur d'enseignement secondaire qualifiant

Discipline	Mathématiques
Téléphone	+212 7 08 27 07 29
Site web	www.lyceemaroc.com

Table des matières

1	Notions de logique	3
1.1	Proposition, fonction propositionnelle	3
1.2	Les quantificateurs	4
1.3	Opérations sur les propositions	6
1.3.1	La négation	6
1.3.2	La conjonction et la disjonction	7
1.3.3	L'implication	8
1.3.4	L'équivalence	9
1.4	Les lois logiques	10
1.5	Les raisonnements mathématiques	12
1.5.1	Raisonnement par contre-exemple	12
1.5.2	Raisonnement par déduction	12
1.5.3	Raisonnement direct	13
1.5.4	Raisonnement par implications successives	14
1.5.5	Raisonnement par contraposée	14
1.5.6	Raisonnement par équivalences successives	15
1.5.7	Raisonnement par disjonction des cas	17
1.5.8	Raisonnement par l'absurde	18
1.5.9	Raisonnement par récurrence	19
	Quel raisonnement choisir ?	20
	Devoir à la maison	20

Notions de logique

RAPPEL — Ce que le chapitre vise

Capacités exigibles

- Reconnaître une proposition et déterminer sa valeur de vérité.
- Utiliser correctement les connecteurs et les quantificateurs.
- Écrire la négation d'une proposition, même quantifiée.
- Choisir et rédiger le raisonnement adapté : direct, contraposée, équivalences, disjonction des cas, absurde, contre-exemple, récurrence.

Pourquoi ce chapitre est premier

La logique n'est pas un chapitre de plus : c'est la *langue* dans laquelle tous les autres sont écrits. Chaque démonstration de l'année utilisera l'un des raisonnements de ce chapitre.

Notations. La négation de P se note $\overline{P}$ ou « non P » ; la conjonction $P \wedge Q$ ou « P et Q » ; la disjonction $P \vee Q$ ou « P ou Q ».

1.1 Proposition, fonction propositionnelle

ACTIVITÉ 1 — Vrai ou faux ?

Recopier le tableau suivant et mettre une croix dans la case qui convient.

Énoncé	Vrai	Faux
Tout nombre pair est divisible par 4		
La somme de deux nombres impairs est un nombre pair		
$\sqrt{2}$ est un nombre rationnel		
La translation conserve les distances		
La fonction $x \mapsto x^2$ (où $x \in \mathbb{R}$) est une fonction paire		

DÉFINITION 1 — Proposition

Une **proposition** (ou *assertion*) est un énoncé mathématique qui a un sens et qui est **soit vrai, soit faux**, mais jamais les deux à la fois. On note **V** la valeur de vérité d'une proposition vraie et **F** celle d'une proposition fausse.

Une **table de vérité** indique la valeur de vérité d'une proposition construite à partir d'autres, selon les valeurs de vérité de celles-ci.

EXEMPLE 1 — Trois propositions

- $P : 2 + 3 = 4$ est fausse.
- $Q : \sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{6}$ est vraie.
- $R : \sqrt{3} + \sqrt{2} > 1$ est vraie.

En revanche, « $x + 1 = 3$ » n'est *pas* une proposition : sa valeur de vérité dépend de x .

ACTIVITÉ 2 — Une expression qui dépend d'une variable

On considère l'expression $A(x) : x^2 - x \geq 0$, où $x \in \mathbb{R}$.

- Pour $x = 2$: on obtient $2^2 - 2 \geq 0$, proposition **vraie**.
- Pour $x = \frac{1}{2}$: on obtient $\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \geq 0$, proposition **fausse**.

L'expression $A(x)$ n'est pas une proposition, mais elle en devient une dès qu'on remplace x par un réel donné.

DÉFINITION 2 — Fonction propositionnelle

On appelle **fonction propositionnelle** tout énoncé contenant une ou plusieurs variables appartenant à un ensemble E , et qui **devient une proposition** chaque fois qu'on remplace la (ou les) variable(s) par un (ou des) élément(s) de E .

On la note $A(x)$, $P(x)$, $A(x; y)$, ...

REMARQUE 1

Ce qui fait d'un énoncé une fonction propositionnelle, c'est la **présence d'une variable**, et non le fait qu'il soit vrai pour certaines valeurs et faux pour d'autres. Ainsi $x^2 + 1 > 0$ ($x \in \mathbb{R}$) est une fonction propositionnelle, vraie pour *toutes* les valeurs de x .

1.2 Les quantificateurs

DÉFINITION 3 — Quantificateur universel, quantificateur existentiel

Soit $P(x)$ une fonction propositionnelle, où x appartient à un ensemble E .

- La proposition $(\forall x \in E) P(x)$ est vraie si $P(x)$ est vraie pour **tous** les éléments x de E ; elle est fausse dès que $P(x)$ est fausse pour **au moins un** élément. Le symbole $\forall$ se lit « pour tout » ou « quel que soit ».
- La proposition $(\exists x \in E) P(x)$ est vraie si $P(x)$ est vraie pour **au moins un** élément x de E ; elle est fausse si $P(x)$ est fausse pour **tous** les éléments. Le symbole $\exists$ se lit « il existe (au moins) ».
- La proposition $(\exists! x \in E) P(x)$ est vraie s'il existe **un et un seul** élément x de E tel que $P(x)$ soit vraie. Le symbole $\exists!$ se lit « il existe un unique ».

REMARQUE 2 — Lecture

- Après $\forall$, la virgule (ou les deux-points) se lit « on a » ou ne se lit pas ; après $\exists$, elle se lit « **tel que** ».
- Les quantificateurs ne sont pas des abréviations : on ne les écrit pas au milieu d'une phrase en français.

EXEMPLE 2 — Valeur de vérité de propositions quantifiées

- 1) $(\forall x \in \mathbb{R}) x^2 \geq 0$ est **vraie**.

- 2) $(\forall x \in \mathbb{R}) x \geq 0$ est **fausse** : $-1 \in \mathbb{R}$ et $-1 < 0$.
- 3) $(\exists x \in \mathbb{R}) x^2 = -1$ est **fausse** : un carré de réel n'est jamais négatif.
- 4) $(\exists x \in \mathbb{R}) x(x-1) < 0$ est **vraie** : $x = \frac{1}{2}$ convient, car $\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) < 0$.
- 5) $(\exists! x \in \mathbb{R}) x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$ est **vraie** : $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = (x - \sqrt{2})^2$ s'annule seulement en $\sqrt{2}$.

APPLICATION 1 — Traduire en langage mathématique

Réécrire les propositions suivantes à l'aide des quantificateurs.

- 1) P_1 : « La valeur absolue de tout réel non nul est strictement positive. »
- 2) P_2 : « Il existe au moins un réel x tel que $2x^2 - 3x = 0$. »
- 3) P_3 : « L'équation $x - 2\sqrt{x} + 1 = 0$ admet une unique solution réelle positive. »
- 4) P_4 : « Le polynôme $x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ admet au moins une racine réelle. »

SOLUTION 1

$$P_1 : (\forall x \in \mathbb{R}^*) |x| > 0.$$

$$P_2 : (\exists x \in \mathbb{R}) 2x^2 - 3x = 0.$$

$$P_3 : (\exists! x \in \mathbb{R}^+) x - 2\sqrt{x} + 1 = 0.$$

$$P_4 : (\exists x \in \mathbb{R}) x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Démontrer une proposition quantifiée

RAPPEL — Les deux gestes de base

Pour montrer $(\forall x \in E) P(x)$: on commence par « **Soit** $x \in E$ » — c'est l'acte de naissance de x , un élément *quelconque* de E — puis on démontre $P(x)$ pour ce x .

Pour montrer $(\exists x \in E) P(x)$: si l'on a un candidat en tête, on écrit « **Posons** $x = \dots$ » et on vérifie qu'il convient. Un seul exemple suffit.

EXEMPLE 3 — Une proposition universelle

Montrons que $(\forall x \in \mathbb{R}) \frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{2}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\frac{x}{x^2 + 1} - \frac{1}{2} = \frac{2x - x^2 - 1}{2(x^2 + 1)} = \frac{-(x-1)^2}{2(x^2 + 1)} \leq 0,$$

car $(x-1)^2 \geq 0$ et $x^2 + 1 > 0$. D'où le résultat.

EXEMPLE 4 — Une proposition existentielle

Montrons que $(\exists x \in \mathbb{R}) \sin x = x$. Posons $x = 0$: on a bien $\sin 0 = 0$.

L'ordre des quantificateurs

REMARQUE 3 — On ne permute pas n'importe comment

- ▶ On peut permuter deux quantificateurs **de même nature**.
- ▶ En général, on **ne peut pas** permuter deux quantificateurs de natures différentes :
 - dans $(\exists x \in E)(\forall y \in F) P(x; y)$, l'élément x est choisi *une fois pour toutes* : il ne dépend pas de y ;
 - dans $(\forall y \in F)(\exists x \in E) P(x; y)$, l'élément x est choisi *après* y : il peut dépendre de y .

EXEMPLE 5 — La même phrase, deux sens

« Pour toute personne, il existe un numéro de téléphone » est vraie : le numéro dépend de la personne.
 « Il existe un numéro, pour toutes les personnes » est fausse : ce serait le même numéro pour tout le monde.

En mathématiques :

- ▶ $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) x + y = 2$ et $(\forall y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) x + y = 2$ ont la même valeur de vérité : toutes deux sont fausses.
- ▶ $(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) x + y = 2$ est **vraie** (il suffit de prendre $x = 2 - y$), alors que $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) x + y = 2$ est **fausse**.

APPLICATION 2 — Valeur de vérité

Étudier la valeur de vérité des propositions suivantes.

$P_1 : (\exists! x \in \mathbb{R}) x^2 = 4$	$P_5 : (\exists n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}) n - m = 12$
$P_2 : (\forall x \in \mathbb{R}) x^2 + x + 1 > 0$	$P_6 : (\forall n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}) n - m = 12$
$P_3 : (\exists x \in \mathbb{N}) 3x - 1 = 0$	$P_7 : (\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}) n - m = 12$
$P_4 : (\forall x \in \mathbb{R}) x = x$	$P_8 : (\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}) n - m = 12$

SOLUTION 2

P_1 **fausse** : 2 et -2 conviennent.

P_2 **vraie** : $\Delta = -3 < 0$ et $a = 1 > 0$.

P_3 **fausse** : la seule solution $\frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$.

P_4 **fausse** : $|-1| = 1 \neq -1$.

P_5 **vraie** : $n = 12, m = 0$.

P_6 **fausse** : $n = m = 0$.

P_7 **fausse** : pour $n = 0$, il faudrait $m = -12 \notin \mathbb{N}$.

P_8 **fausse** : m prendrait une seule valeur $n - 12$.

1.3 Opérations sur les propositions

1.3.1 La négation

DÉFINITION 4 — Négation

La **négation** d'une proposition P , notée $\bar{P}$ ou « non P », est la proposition qui est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie.

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

EXEMPLE 6

- La négation de $3 > 2$ est $3 \leq 2$.
- La négation de $(-2)^2 = 4$ est $(-2)^2 \neq 4$.
- La négation de $\sqrt{2} > 2$ est $\sqrt{2} \leq 2$; celle de $\sqrt{2} \in \mathbb{Z}$ est $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$.

PROPRIÉTÉ 1 — Négation d'une proposition quantifiée

- La négation de la proposition " $(\forall x \in E) : P(x)$ " est " $(\exists x \in E) : \overline{P}(x)$ ".
- La négation de la proposition " $(\exists x \in E) : P(x)$ " est " $(\forall x \in E) : \overline{P}(x)$ ".

Mécanique : on change chaque $\forall$ en $\exists$ et chaque $\exists$ en $\forall$, *sans changer leur ordre*, puis on nie la proposition qui suit. Il n'est pas nécessaire de savoir si la proposition est vraie ou fausse pour écrire sa négation.

EXEMPLE 7 — Sept négations

Proposition	Négation
$(\forall x \in [1; +\infty[) x + 1 \in \mathbb{Z}$	$(\exists x \in [1; +\infty[) x + 1 \notin \mathbb{Z}$
$(\exists x \in \mathbb{R}) x^2 + 1 = 0$	$(\forall x \in \mathbb{R}) x^2 + 1 \neq 0$
$(\exists n \in \mathbb{N}) n^2 = n$	$(\forall n \in \mathbb{N}) n^2 \neq n$
$(\forall x \in \mathbb{R}) x < 0$	$(\exists x \in \mathbb{R}) x \geq 0$
$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y < 0) x + y \geq 0$	$(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y < 0) x + y < 0$
$(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) x^2 + y^2 = 0$	$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) x^2 + y^2 \neq 0$
$(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) x + y \leq 10$	$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) x + y > 10$

Attention : dans « $\exists y < 0$ », la condition $y < 0$ fait partie du quantificateur ; elle **ne change pas** dans la négation.

1.3.2 La conjonction et la disjonction**DÉFINITION 5 — Conjonction « et », disjonction « ou »**

- La **conjonction** de P et Q , notée $P \wedge Q$ ou « P et Q », est vraie **uniquement** lorsque P et Q sont vraies toutes les deux.
- La **disjonction** de P et Q , notée $P \vee Q$ ou « P ou Q », est vraie lorsque **au moins une** des deux propositions est vraie.

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

REMARQUE 4 — Le « ou » mathématique est inclusif

En mathématiques, « P ou Q » est vraie aussi quand P et Q sont vraies en même temps. Ce n'est pas le « ou » du menu « fromage ou dessert ».

EXEMPLE 8

- $(-5 \leq 2) \vee (5 \leq 2)$ est vraie ; $(-5 \leq 2) \wedge (5 \leq 2)$ est fausse.
- $(3 + 2 = 6) \vee (3 + 2 = 5)$ est vraie ; $(3 + 2 = 6) \wedge (3 + 2 = 5)$ est fausse.
- « 3 est impair **et** $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ » est vraie.

PROPRIÉTÉ 2 — Lois de Morgan

$$\overline{P \wedge Q} \iff \overline{P} \vee \overline{Q}, \quad \overline{P \vee Q} \iff \overline{P} \wedge \overline{Q}.$$

Autrement dit : la négation échange « et » et « ou ».

REMARQUE 5 — Deux propositions toujours fixées

Pour toute proposition P :

- $P \wedge \overline{P}$ est toujours **fausse** (principe de non-contradiction) ;
- $P \vee \overline{P}$ est toujours **vraie** (principe du tiers exclu).

1.3.3 L'implication

DÉFINITION 6 — Implication

L'implication de P vers Q , notée $P \implies Q$ et lue « P implique Q » ou « si P alors Q », est la proposition qui est **fausse uniquement lorsque P est vraie et Q est fausse**. Elle est vraie dans les trois autres cas.

P	Q	$P \implies Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

REMARQUE 6 — Ce qui surprend toujours

Quand P est fausse, l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, quelle que soit Q . Ainsi « $2 + 2 = 5 \Rightarrow$ la Lune est en fromage » est une proposition vraie. L'implication ne dit rien de Q tant que P n'est pas vraie.

EXEMPLE 9

- ▶ $(2 + 2 = 4) \Rightarrow (3 > 1)$ est vraie ($\mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{V}$).
- ▶ $(2 + 2 = 5) \Rightarrow (3 > 1)$ est vraie ($\mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{V}$).
- ▶ $(2 + 2 = 4) \Rightarrow (1 > 3)$ est fausse ($\mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{F}$).
- ▶ $(-2)^2 = 2^2 \Rightarrow -2 = 2$ est fausse : c'est pourquoi on ne peut pas « simplifier les carrés ».
- ▶ $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5} \Rightarrow 5$ est premier est vraie ($\mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{V}$).

PROPOSITION 1 — L'implication s'écrit avec « non » et « ou »

$$(P \Rightarrow Q) \iff (\bar{P} \vee Q)$$

Par conséquent, la **négation d'une implication** n'est pas une implication :

$$\bar{P \Rightarrow Q} \iff (P \wedge \bar{Q})$$

EXEMPLE 10 — Démonstration par une table de vérité

P	Q	$\bar{P}$	$\bar{P} \vee Q$	$P \Rightarrow Q$
$\mathbf{V}$	$\mathbf{V}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{V}$	$\mathbf{V}$
$\mathbf{V}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{F}$
$\mathbf{F}$	$\mathbf{V}$	$\mathbf{V}$	$\mathbf{V}$	$\mathbf{V}$
$\mathbf{F}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{V}$	$\mathbf{V}$	$\mathbf{V}$

Les deux dernières colonnes sont identiques.

Application. La négation de $(\forall x \in \mathbb{R}) (x \geq 2 \Rightarrow x^2 \geq 4)$ est $(\exists x \in \mathbb{R}) (x \geq 2 \wedge x^2 < 4)$.

1.3.4 L'équivalence**DÉFINITION 7 — Équivalence**

L'équivalence de P et Q , notée $P \iff Q$ et lue « P équivaut à Q » ou « P si et seulement si Q », est vraie lorsque P et Q ont **la même valeur de vérité**.

P	Q	$P \iff Q$	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$
$\mathbf{V}$	$\mathbf{V}$	$\mathbf{V}$	$\mathbf{V}$	$\mathbf{V}$
$\mathbf{V}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{V}$
$\mathbf{F}$	$\mathbf{V}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{V}$	$\mathbf{F}$
$\mathbf{F}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{V}$	$\mathbf{V}$	$\mathbf{V}$

La table montre que $(P \iff Q) \iff [(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)]$.

EXEMPLE 11

- ▶ $(2 + 2 = 4) \iff (4 = 4)$ est vraie ; $(2 + 2 = 4) \iff (4 > 5)$ est fausse.
- ▶ $\sqrt{3^2 + 4^2} = 7 \iff 7$ est impair est fausse (**F** $\iff$ **V**).

DÉFINITION 8 — Condition nécessaire, condition suffisante

Lorsque l'implication $P \implies Q$ est vraie :

- ▶ P est une **condition suffisante** pour Q : il suffit d'avoir P pour avoir Q ;
- ▶ Q est une **condition nécessaire** pour P : il faut avoir Q pour avoir P .

Lorsque $P \iff Q$ est vraie, P est une **condition nécessaire et suffisante** (CNS) pour Q . Les expressions « si et seulement si », « il faut et il suffit » et « CNS » signifient toutes $\iff$.

EXEMPLE 12 — Nécessaire n'est pas suffisant

Pour qu'un entier soit divisible par 4, il **faut** qu'il soit pair (condition nécessaire), mais cela ne **suffit** pas : 6 est pair et non divisible par 4.

APPLICATION 3 — Valeur de vérité

Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes.

- | | |
|---|--|
| 1) $\sqrt{2} + 1 < \sqrt{3}$ | 7) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \implies 2 \notin \mathbb{Q}$ |
| 2) $\left(\frac{2}{5} \in \mathbb{Q}\right) \text{ ou } (\sqrt{2} < 0)$ | 8) $17 \text{ premier} \implies 31 \text{ premier}$ |
| 3) $(2022 \text{ est premier}) \text{ et } (3 \text{ divise } 2023)$ | 9) $22^{23} > 23^{22} \implies (\sqrt{4} \in \mathbb{N} \text{ ou } -\sqrt{4} \in \mathbb{N})$ |
| 4) $(\sqrt{5} < 2) \text{ ou } (-\sqrt{5} < -2)$ | 10) $\sqrt{2} < 1 \iff 11^2 = 100$ |
| 5) $\pi > 5 \text{ ou } \pi \in \mathbb{N}$ | 11) $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 \iff \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^2 = 2 + \sqrt{3}$ |
| 6) $\sqrt{2} < 1 \implies 3\sqrt{2} < 3$ | |

SOLUTION 3

- | | |
|---|--|
| 1) F : $(\sqrt{2} + 1)^2 = 3 + 2\sqrt{2} > 3$. | 7) F : V $\implies$ F ($2 \in \mathbb{Q}$). |
| 2) V : $\frac{2}{5} \in \mathbb{Q}$. | 8) V : V $\implies$ V . |
| 3) F : 2022 est pair (et $3 \nmid 2023$). | 9) V : la conclusion est vraie ($\sqrt{4} = 2 \in \mathbb{N}$). |
| 4) V : $\sqrt{5} > 2$ donc $-\sqrt{5} < -2$. | 10) V : F $\iff$ F . |
| 5) V : $\pi > 5$ et $\pi \in \mathbb{N}$ sont fausses toutes deux. | 11) F : $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2} \neq 3$, tandis que la |
| 6) V : F $\implies$ F . | seconde est vraie. |

1.4 Les lois logiques**DÉFINITION 9 — Loi logique**

Une **loi logique** est une proposition construite à partir de propositions $P, Q, R, \dots$ à l'aide des connecteurs, et qui est **toujours vraie**, quelles que soient les valeurs de vérité de $P, Q, R, \dots$

Pour montrer qu'une proposition est une loi logique, il suffit de dresser sa table de vérité et de constater que sa dernière colonne ne contient que des **V**.

ACTIVITÉ 3

Dresser la table de vérité de $P \implies (Q \implies P)$. Qu'observe-t-on ?

PROPOSITION 2 — Les lois logiques usuelles

Soient P , Q et R trois propositions. Les propositions suivantes sont des lois logiques.

- 1) $\overline{\overline{P}} \iff P$
- 2) $(P \wedge P) \iff P$; $(P \vee P) \iff P$
- 3) $(P \wedge Q) \iff (Q \wedge P)$
- 4) $(P \vee Q) \iff (Q \vee P)$
- 5) $[(P \wedge Q) \wedge R] \iff [P \wedge (Q \wedge R)]$
- 6) $[(P \vee Q) \vee R] \iff [P \vee (Q \vee R)]$
- 7) $\overline{P \wedge Q} \iff \overline{P} \vee \overline{Q}$
- 8) $\overline{P \vee Q} \iff \overline{P} \wedge \overline{Q}$
- 9) $P \wedge (Q \vee R) \iff (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
- 10) $P \vee (Q \wedge R) \iff (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
- 11) $(P \implies Q) \iff (\overline{P} \vee Q)$
- 12) $(P \implies Q) \iff (\overline{Q} \implies \overline{P})$ (contraposée)
- 13) $[(P \implies Q) \wedge (Q \implies R)] \implies (P \implies R)$ (transitivité)
- 14) $[P \wedge (P \implies Q)] \implies Q$ (déduction)

Les propriétés 3 à 6 sont la commutativité et l'associativité, 9 et 10 la distributivité.

EXEMPLE 13 — Démontrer une distributivité par une table

Montrons la loi 10 : $P \vee (Q \wedge R) \iff (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$	$P \vee Q$	$P \vee R$	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Les cinquième et huitième colonnes sont identiques : l'équivalence est une loi logique.

APPLICATION 4

Montrer que les propositions suivantes sont des lois logiques.

- 1) $P \iff \overline{\overline{P}}$
- 2) $[P \implies (Q \wedge R)] \iff [(\overline{P} \vee Q) \wedge (\overline{P} \vee R)]$
- 3) $[(P \implies Q) \wedge (Q \implies R)] \implies (P \implies R)$

SOLUTION 4

- 1) Si P est vraie, $\overline{P}$ est fausse et $\overline{\overline{P}}$ vraie ; si P est fausse, $\overline{P}$ est vraie et $\overline{\overline{P}}$ fausse. Les deux ont toujours la même valeur.
- 2) Sans table : $P \implies (Q \wedge R) \iff \overline{P} \vee (Q \wedge R)$ (loi 11), puis par distributivité (loi 10 appliquée à $\overline{P}$)

$$\iff (\bar{P} \vee Q) \wedge (\bar{P} \vee R).$$

3) Par table de vérité à 8 lignes : la seule façon de rendre $P \implies R$ fausse est P vraie et R fausse ; alors soit Q est vraie et $Q \implies R$ est fausse, soit Q est fausse et $P \implies Q$ est fausse. Dans les deux cas l'hypothèse est fausse, donc l'implication globale est vraie.

1.5 Les raisonnements mathématiques

1.5.1 Raisonnement par contre-exemple

PROPRIÉTÉ 3

Pour prouver que $(\forall x \in E) P(x)$ est **fausse**, il faut et il suffit de prouver que sa négation $(\exists x \in E) \overline{P(x)}$ est vraie, c'est-à-dire de trouver **un** élément $x_0 \in E$ pour lequel $P(x_0)$ est fausse. Cet élément s'appelle un **contre-exemple**.

EXEMPLE 14

Montrons que $(\forall x \in \mathbb{R}) 2x - 1 = 0$ est fausse. Pour $x = 0 : 2 \times 0 - 1 = -1 \neq 0$. Donc $(\exists x \in \mathbb{R}) 2x - 1 \neq 0$ est vraie, et la proposition de départ est fausse.

APPLICATION 5

Montrer que les propositions suivantes sont fausses.

- 1) $P_1 : (\forall x \in \mathbb{R}) x + 1 = 2$.
- 2) $P_2 : (\forall x \in \mathbb{R}^*) x + \frac{1}{x} \geq 2$.
- 3) $P_3 : (\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) \sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

SOLUTION 5

1) $x = 0 : 0 + 1 = 1 \neq 2$. 2) $x = -1 : -1 - 1 = -2 < 2$. 3) $x = y = 1 : \sqrt{2} \neq 2$.

1.5.2 Raisonnement par déduction

PROPRIÉTÉ 4

Il repose sur la loi logique $[P \wedge (P \implies Q)] \implies Q$: si P est vraie et si $P \implies Q$ est vraie, alors Q est vraie.

REMARQUE 7 — Le symbole $\implies$ ne remplace pas le mot « donc »

Écrire « $P \implies Q$ » affirme seulement que *si* P est vraie *alors* Q l'est ; cela n'affirme pas que Q est vraie. Pour conclure Q , il faut aussi savoir que P est vraie : on écrit alors « **donc** Q ».

EXEMPLE 15

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $x^2 + 4x + 8 > 1$. On a $x^2 + 4x + 8 = (x + 2)^2 + 4$. Or $(x + 2)^2 \geq 0$, **donc** $x^2 + 4x + 8 \geq 4$, et comme $4 > 1$, **donc** $x^2 + 4x + 8 > 1$.

1.5.3 Raisonnement direct

PROPRIÉTÉ 5

Pour montrer $P \implies Q$, on **suppose que P est vraie** et on démontre que Q est vraie.

EXEMPLE 16 — Parité d'un carré

Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ n \text{ pair} \implies n^2 \text{ pair}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ pair : il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. Alors $n^2 = 4k^2 = 2 \times 2k^2$ avec $2k^2 \in \mathbb{N}$, donc n^2 est pair.

EXEMPLE 17 — Trois implications rédigées

1) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrons que $\begin{cases} 0 < x < 2 \\ 0 < y < 2 \end{cases} \implies \frac{1}{x} + \frac{1}{y} > 1$.

Si $0 < x < 2$, la fonction inverse étant décroissante sur $]0; +\infty[$, $\frac{1}{x} > \frac{1}{2}$. De même $\frac{1}{y} > \frac{1}{2}$. En ajoutant : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > 1$.

2) Montrons que $(\forall x \in \mathbb{R}) \ |x| \leq 2 \implies |3x + 1| \leq 7$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \leq 2$. Par l'inégalité triangulaire : $|3x + 1| \leq 3|x| + 1 \leq 3 \times 2 + 1 = 7$.

3) Montrons que $(\forall x \in \mathbb{R}) \ x > 0 \implies x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Soit $x > 0$. Alors $x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$, car $(x-1)^2 \geq 0$ et $x > 0$.

APPLICATION 6

1) Montrer que $(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2) \ a^2 + b^2 = 0 \implies (a = 0 \text{ et } b = 0)$.

2) Soient $x, y \in \mathbb{R}^+$. Montrer que $x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \implies x = y = 1$.

SOLUTION 6

1) Supposons $a^2 + b^2 = 0$. Comme $b^2 \geq 0$, on a $a^2 = -b^2 \leq 0$; or $a^2 \geq 0$, donc $a^2 = 0$ et $a = 0$. Alors $b^2 = 0$ et $b = 0$.

2) Supposons $x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y}$. Comme $x = (\sqrt{x})^2$ et $y = (\sqrt{y})^2$:

$$(\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} + 1 + (\sqrt{y})^2 - 2\sqrt{y} + 1 = 0 \implies (\sqrt{x} - 1)^2 + (\sqrt{y} - 1)^2 = 0.$$

D'après la question 1), $\sqrt{x} - 1 = 0$ et $\sqrt{y} - 1 = 0$, donc $x = y = 1$.

1.5.4 Raisonnement par implications successives

PROPRIÉTÉ 6

Il repose sur la loi logique $[(P \implies P_1) \wedge (P_1 \implies P_2) \wedge \dots \wedge (P_n \implies Q)] \implies (P \implies Q)$: pour montrer $P \implies Q$, on enchaîne des implications intermédiaires.

EXEMPLE 18

Montrons que $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \frac{1}{1 + \sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \implies x = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On a

$$\frac{1}{1 + \sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \implies 1 = (1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x}) \implies 1 = 1 - x \implies x = 0.$$

1.5.5 Raisonnement par contraposée

PROPRIÉTÉ 7

Il repose sur la loi logique $(P \implies Q) \iff (\bar{Q} \implies \bar{P})$. Pour montrer $P \implies Q$, il suffit de montrer sa **contraposée** $\bar{Q} \implies \bar{P}$, qui est parfois plus simple.

REMARQUE 8 — Contraposée n'est pas réciproque

La **réciproque** de $P \implies Q$ est $Q \implies P$: elle n'a en général *pas* la même valeur de vérité. « $x = 2 \implies x^2 = 4$ » est vraie, sa réciproque « $x^2 = 4 \implies x = 2$ » est fausse. Seule la **contraposée** lui est équivalente.

EXEMPLE 19 — Un cas où la contraposée simplifie tout

Montrons que $(\forall x, y \in \mathbb{R}^+) x \neq y \implies x^3 + 4x \neq y^3 + 4y$.

Par contraposée, montrons que $x^3 + 4x = y^3 + 4y \implies x = y$. On a

$$x^3 - y^3 + 4(x - y) = 0 \implies (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 4) = 0 \implies x - y = 0,$$

car $x^2 + xy + y^2 + 4 > 0$ pour $x, y \in \mathbb{R}^+$.

EXEMPLE 20 — Avec une racine carrée

Montrons que $(\forall x \in \mathbb{R}^+) x \neq 4 \implies \sqrt{x} - 1 \neq \frac{x}{4}$.

Par contraposée, montrons que $\sqrt{x} - 1 = \frac{x}{4} \implies x = 4$:

$$\sqrt{x} - 1 = \frac{x}{4} \implies 4\sqrt{x} - 4 = x \implies x - 4\sqrt{x} + 4 = 0 \implies (\sqrt{x} - 2)^2 = 0 \implies x = 4.$$

APPLICATION 7

- 1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{Z}) n^2 \text{ pair} \implies n \text{ pair}$.
- 2) Montrer que $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) x \neq y \implies (x + 1)(y - 1) \neq (x - 1)(y + 1)$.

3) Montrer que $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) (xy \neq 1 \text{ et } x \neq y) \implies \frac{x}{x^2 + x + 1} \neq \frac{y}{y^2 + y + 1}$.

SOLUTION 7

1) Contraposée : n impair $\implies n^2$ impair. Si $n = 2k + 1$, alors $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ est impair.

2) Contraposée : $(x + 1)(y - 1) = (x - 1)(y + 1) \implies x = y$. En développant : $xy - x + y - 1 = xy + x - y - 1 \implies 2y = 2x \implies x = y$.

3) Contraposée : si les deux fractions sont égales (les dénominateurs sont > 0 , de discriminant -3), alors

$$x(y^2 + y + 1) = y(x^2 + x + 1) \implies xy^2 + x - yx^2 - y = 0 \implies (x - y)(1 - xy) = 0,$$

donc $x = y$ ou $xy = 1$ — ce qui est la négation de « $xy \neq 1$ et $x \neq y$ ».

1.5.6 Raisonnement par équivalences successives

PROPRIÉTÉ 8

Il repose sur la loi logique $[(P \iff R) \wedge (R \iff Q)] \implies (P \iff Q)$.

Pour montrer $P \iff Q$, on peut :

- transformer P de proche en proche jusqu'à Q en gardant l'équivalence à chaque étape : $P \iff \dots \iff \dots \iff Q$;
- ou raisonner par **double implication** : montrer $P \implies Q$ puis $Q \implies P$.

Pour montrer qu'une proposition P est vraie, il suffit de trouver une proposition Q vraie telle que $P \iff \dots \iff Q$.

REMARQUE 9 — Le piège : chaque flèche doit aller dans les deux sens

Élever au carré, multiplier par une expression de signe inconnu ou diviser par une quantité qui peut être nulle **ne préserve pas** toujours l'équivalence. Avant d'écrire $\iff$, vérifiez que l'étape se lit aussi de droite à gauche.

EXEMPLE 21 — Une équivalence entre deux encadrements

Montrons que $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}) |x - 1| < \frac{1}{2} \iff \frac{2}{5} < \frac{1}{x+1} < \frac{2}{3}$.

$$|x - 1| < \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \iff \frac{3}{2} < x + 1 < \frac{5}{2} \iff \frac{2}{5} < \frac{1}{x+1} < \frac{2}{3}.$$

La dernière équivalence est légitime : dans les deux sens, $x + 1$ est strictement positif, et la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

EXEMPLE 22 — Une inégalité avec racine

Montrons que $(\forall x \in [-2; 2]) \sqrt{4 - x^2} \leq x + 2\sqrt{2}$.

Soit $x \in [-2; 2]$. On a $x + 2\sqrt{2} \geq -2 + 2\sqrt{2} > 0$: les deux membres sont positifs, et l'on peut élever

au carré sans perdre l'équivalence.

$$\sqrt{4-x^2} \leq x + 2\sqrt{2} \iff 4-x^2 \leq x^2 + 4\sqrt{2}x + 8 \iff 0 \leq 2x^2 + 4\sqrt{2}x + 4 \iff 0 \leq 2(x + \sqrt{2})^2.$$

La dernière proposition est vraie, donc la première aussi. L'égalité a lieu pour $x = -\sqrt{2}$: l'inégalité ne peut donc pas être stricte.

EXEMPLE 23 — Une inégalité classique

Montrons que $(\forall a, b \in \mathbb{R}) \ a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$.

$$a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b \iff 2a^2 + 2b^2 + 2 - 2ab - 2a - 2b \geq 0 \iff (a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 \geq 0,$$

qui est vraie comme somme de carrés.

APPLICATION 8

- 1) Montrer que pour tous $x, y \neq -1$: $\frac{x}{1+x} = \frac{y}{1+y} \iff x = y$.
- 2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $\sqrt{2x+2} = 1 + \sqrt{x} \iff x = 1$.
- 3) Montrer que pour tout $x \in [1; +\infty[$: $\frac{\sqrt{x-1}}{x} \leq \frac{1}{2}$.

SOLUTION 8

- 1) $\frac{x}{1+x} = \frac{y}{1+y} \iff x(1+y) = y(1+x) \iff x + xy = y + xy \iff x = y$ (les dénominateurs étant non nuls, le produit en croix est une équivalence).
- 2) Les deux membres sont positifs : $\sqrt{2x+2} = 1 + \sqrt{x} \iff 2x+2 = 1 + 2\sqrt{x} + x \iff x - 2\sqrt{x} + 1 = 0 \iff (\sqrt{x} - 1)^2 = 0 \iff x = 1$.
- 3) $x \geq 1 > 0$ et les deux membres sont positifs : $\frac{\sqrt{x-1}}{x} \leq \frac{1}{2} \iff 2\sqrt{x-1} \leq x \iff 4(x-1) \leq x^2 \iff (x-2)^2 \geq 0$, qui est vraie.

EXERCICE 1 — Pour s'entraîner ★★★

- 1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} = 1 \iff (x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3})$.
- 2) Soient $a \in [1; +\infty[$ et $b \in [4; +\infty[$. Montrer que $\sqrt{a-1} + 2\sqrt{b-4} = \frac{a+b}{2} \iff (a=2 \text{ et } b=8)$.

INDICATION

Pour la question 2, posez $A = \sqrt{a-1}$ et $B = \sqrt{b-4}$, puis écrivez l'égalité sous la forme $(A-1)^2 + (B-2)^2 = 0$.

1.5.7 Raisonnement par disjonction des cas

PROPRIÉTÉ 9

Pour montrer $(\forall x \in E) P(x)$ lorsque $E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n$, on démontre $P(x)$ successivement pour $x \in E_1$, pour $x \in E_2$, ..., pour $x \in E_n$. Il repose sur la loi logique $[(P \implies R) \wedge (Q \implies R)] \implies [(P \vee Q) \implies R]$.

C'est le raisonnement naturel dès qu'apparaît une **valeur absolue**, une **parité**, ou une fonction définie par morceaux.

EXEMPLE 24 — Une inégalité avec valeur absolue

Montrons que $(\forall x \in \mathbb{R}) |x - 1| \leq x^2 - x + 1$.

Premier cas : $x \geq 1$. Alors $|x - 1| = x - 1$ et

$$x^2 - x + 1 - |x - 1| = x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 \geq 0.$$

Second cas : $x < 1$. Alors $|x - 1| = 1 - x$ et

$$x^2 - x + 1 - |x - 1| = x^2 \geq 0.$$

Conclusion : Dans les deux cas, $|x - 1| \leq x^2 - x + 1$.

EXEMPLE 25 — Résoudre une équation avec valeur absolue

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : 3 - 2|x - 4| = 2x + 5$.

Si $x \leq 4$: $|x - 4| = 4 - x$, donc $(E) \iff 3 - 8 + 2x = 2x + 5 \iff -5 = 5$: impossible. $S_1 = \emptyset$.

Si $x \geq 4$: $|x - 4| = x - 4$, donc $(E) \iff 3 - 2x + 8 = 2x + 5 \iff x = \frac{3}{2}$. Or $\frac{3}{2} \notin [4; +\infty[$. $S_2 = \emptyset$.

Conclusion : $S = S_1 \cup S_2 = \emptyset$.

APPLICATION 9

- 1) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \sqrt{1 + x^2} + x > 0$.
- 2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $n^2 + n$ est pair.
- 3) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) |x - 2| < x^2 - 2x + 3$.

SOLUTION 9

1) Si $x \geq 0$: $\sqrt{1 + x^2} > 0$ et $x \geq 0$, la somme est > 0 . Si $x < 0$: $\sqrt{1 + x^2} > \sqrt{x^2} = |x| = -x$, donc $\sqrt{1 + x^2} + x > 0$.

2) $n^2 + n = n(n + 1)$. Si n est pair, $n = 2k$ et $n(n + 1) = 2k(2k + 1)$ est pair. Si n est impair, $n + 1 = 2k$ est pair et le produit aussi.

3) Si $x \geq 2$: l'inégalité s'écrit $0 < x^2 - 3x + 5$, vraie car $\Delta = -11 < 0$. Si $x < 2$: elle s'écrit $0 < x^2 - x + 1$, vraie car $\Delta = -3 < 0$.

1.5.8 Raisonnement par l'absurde

PROPRIÉTÉ 10

Pour montrer qu'une proposition P est vraie, on **suppose que $\bar{P}$ est vraie** et l'on en déduit une contradiction (une proposition fausse). On conclut alors que P est vraie.

Pour montrer $P \Rightarrow Q$ par l'absurde, on suppose à la fois P vraie et Q fausse, et l'on cherche une contradiction.

EXEMPLE 26 — Une égalité de fractions

Soient $a, b \geq 0$. Montrons que si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a = b$.

Supposons par l'absurde que $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ et $a \neq b$. Alors $a(1+a) = b(1+b)$, soit $a^2 - b^2 = b - a$, c'est-à-dire $(a-b)(a+b) = -(a-b)$. Comme $a-b \neq 0$, on obtient $a+b = -1$: impossible, puisque a et b sont positifs.

EXEMPLE 27 — Une somme avec un irrationnel

Soit $a \notin \mathbb{Q}$. Montrons que $2+a \notin \mathbb{Q}$.

Supposons par l'absurde $2+a = b \in \mathbb{Q}$. Alors $a = b-2$ est la différence de deux rationnels, donc $a \in \mathbb{Q}$: contradiction.

EXEMPLE 28 — $\sqrt{2}$ est irrationnel

Supposons par l'absurde $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$: il existe $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ **premiers entre eux** tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

Alors $p^2 = 2q^2$: p^2 est pair, donc p est pair (application de la contraposée ci-dessus). Écrivons $p = 2k$: il vient $4k^2 = 2q^2$, soit $q^2 = 2k^2$, donc q est pair aussi.

p et q seraient tous deux pairs, alors qu'ils sont premiers entre eux : contradiction. Donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

APPLICATION 10

Soient a, b, c trois réels de l'intervalle $[0; 1]$. Montrer par l'absurde que l'un au moins des trois nombres

$$a(1-b), \quad b(1-c), \quad c(1-a)$$

est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

INDICATION

Commencer par montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) x(1-x) \leq \frac{1}{4}$. Supposer ensuite que les trois nombres sont strictement supérieurs à $\frac{1}{4}$, et comparer leur produit à $a(1-a) \times b(1-b) \times c(1-c)$.

1.5.9 Raisonnement par récurrence

PROPRIÉTÉ 11 — Principe de récurrence

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ une fonction propositionnelle définie pour $n \geq n_0$. Si

- 1) **Initialisation** : $P(n_0)$ est vraie ;
 - 2) **Hérédité** : pour tout $n \geq n_0$, $P(n) \implies P(n+1)$;
- alors $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

REMARQUE 10 — Les deux étapes sont indispensables

Sans initialisation, l'hérédité seule ne prouve rien : la propriété « $n = n+1$ » est héréditaire (si $n = n+1$ alors $n+1 = n+2$), mais elle n'est vraie pour aucun entier.

EXEMPLE 29 — Une divisibilité

Montrons que 3 divise $4^n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Étape 1 : Initialisation. $4^0 - 1 = 0 = 3 \times 0$: la propriété est vraie pour $n = 0$.

Étape 2 : Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que 3 divise $4^n - 1$: il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $4^n - 1 = 3k$. Alors

$$4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1 = 3 \times 4^n + (4^n - 1) = 3(4^n + k),$$

donc 3 divise $4^{n+1} - 1$.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, 3 divise $4^n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXEMPLE 30 — Une inégalité

Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}) 2^n > n$.

Étape 1 : Pour $n = 0$: $2^0 = 1 > 0$.

Étape 2 : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $2^n > n$. Comme de plus $2^n \geq 1$:

$$2^{n+1} = 2^n + 2^n > n + 1.$$

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}) 2^n > n$.

EXEMPLE 31 — Une somme

Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Étape 1 : Pour $n = 1$: $1 = \frac{1 \times 2}{2}$.

Étape 2 : Soit $n \geq 1$ tel que $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Alors

$$1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Conclusion : La formule est vraie pour tout $n \geq 1$.

APPLICATION 11 — Principe de récurrence

- 1) Montrer que $2^n > 3n$ pour tout entier $n \geq 4$.
- 2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.
- 3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 7 divise $8^n - 1$.

Quel raisonnement choisir ?

Ce qu'on veut montrer	Raisonnement	Premier geste
$(\forall x \in E) P(x)$ est fausse	contre-exemple	exhiber un x_0 qui ne convient pas
$(\forall x \in E) P(x)$	direct	« Soit $x \in E$ »
$(\exists x \in E) P(x)$	exemple	« Posons $x = \dots$ »
$P \implies Q$	direct	supposer P , montrer Q
$P \implies Q$ dont la conclusion est de la forme $A \neq B$	contraposée	supposer $\bar{Q}$, montrer $\bar{P}$
$P \iff Q$	équivalences successives ou double implication	vérifier que chaque étape se lit dans les deux sens
propriété avec $ \dots $, parité, morceaux	disjonction des cas	découper E en cas
« $\notin \mathbb{Q}$ », « n'existe pas », unicité	absurde	supposer le contraire
$(\forall n \geq n_0) P(n)$	récurrence	initialisation, puis hérédité

Devoir à la maison**DEVOIR 1 — Synthèse du chapitre**

Exercice 1. ★★ Écrire la négation de chacune des propositions suivantes, puis déterminer la valeur de vérité de la proposition et de sa négation.

- 1) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) x + y > 0$.
- 2) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) x < y^2$.
- 3) $(\forall x \in \mathbb{R}) (x \geq 2 \implies x^2 \geq 4)$.

Exercice 2. ★★★ Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer par contraposée que $(x \neq y \text{ et } xy \neq 1) \implies \frac{x}{x^2 + 1} \neq \frac{y}{y^2 + 1}$.

Exercice 3. ★★★ Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) |x - 1| + |x + 1| \geq 2$, puis déterminer les réels pour lesquels il y a égalité.

Exercice 4. ★★★ Montrer que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$, puis que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 5. ★★★ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^* : 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Document préparé par **Khalid Legdani** — Lycée Technique Settat
Cours, exercices et vidéos : www.lyceemaroc.com