

Informations du document

Niveau	Deuxième année du Baccalauréat
Filière	PC • SVT • STE • STM
Année scolaire	2026–2027
Établissement	Lycée Technique Settat

IDENTITÉ DU PROFESSEUR

Khalid Legdani

Professeur d'enseignement secondaire qualifiant

Discipline	Mathématiques
Téléphone	+212 7 08 27 07 29
Site web	www.lyceemaroc.com

Table des matières

Suites numériques

RAPPEL — Ce que le chapitre vise

Capacités exigibles

- Utiliser les suites arithmétiques et géométriques pour étudier des suites de la forme $u_{n+1} = au_n + b$ et $u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$.
- Utiliser les suites de référence et les critères de convergence pour déterminer une limite.
- Déterminer la limite d'une suite convergente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, avec f continue sur un intervalle I tel que $f(I) \subset I$.

Prérequis

- Suites numériques de 1^{re} année : monotonie, suites arithmétiques et géométriques, raisonnement par récurrence.
- Limites et continuité d'une fonction (chapitre 01).

Orientation officielle. L'étude théorique de la notion de limite d'une suite est *hors programme* : les limites des suites de référence sont admises, et l'on s'appuie sur les limites des fonctions.

1.1 Rappels : monotonie, suites de référence, récurrence

ACTIVITÉ 1 — Une suite récurrente qui cache une suite arithmétique

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \frac{9}{6 - u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Calculer u_1 et u_2 .
- 2) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n < 3$.
- 3) On pose $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$. Calculer v_0 et v_1 , puis montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.
- 4) Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n .

SOLUTION 1

$$1) u_1 = \frac{9}{7} \text{ et } u_2 = \frac{9}{6 - \frac{9}{7}} = \frac{9}{\frac{33}{7}} = \frac{21}{11}.$$

2) *Initialisation* : $u_0 = -1 < 3$. *Hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n < 3$. Alors

$$u_{n+1} - 3 = \frac{9 - 18 + 3u_n}{6 - u_n} = \frac{3(u_n - 3)}{6 - u_n}.$$

Comme $u_n < 3$, on a $u_n - 3 < 0$ et $6 - u_n > 3 > 0$, donc $u_{n+1} - 3 < 0$. *Conclusion* : $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n < 3$.

3) $v_0 = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$. D'après le calcul précédent,

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - 3} = \frac{6 - u_n}{3(u_n - 3)} = \frac{-(u_n - 3) + 3}{3(u_n - 3)} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{u_n - 3} = v_n - \frac{1}{3}.$$

Donc (v_n) est arithmétique de raison $r = -\frac{1}{3}$, et $v_1 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{7}{12}$.

4) $v_n = v_0 + nr = -\frac{1}{4} - \frac{n}{3} = -\frac{4n+3}{12}$, et comme $u_n = 3 + \frac{1}{v_n}$:

$$u_n = 3 - \frac{12}{4n+3}$$

(Vérification : $u_1 = 3 - \frac{12}{7} = \frac{9}{7}$.)

RAPPEL — Monotonie et bornes

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite numérique et $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$.

- ▶ (u_n) est **croissante** $\iff (\forall n \in I) u_{n+1} - u_n \geq 0$.
- ▶ (u_n) est **décroissante** $\iff (\forall n \in I) u_{n+1} - u_n \leq 0$.
- ▶ (u_n) est **constante** $\iff (\forall n \in I) u_{n+1} = u_n$.
- ▶ (u_n) est **majorée** par M $\iff (\forall n \in I) u_n \leq M$.
- ▶ (u_n) est **minorée** par m $\iff (\forall n \in I) u_n \geq m$.
- ▶ (u_n) est **bornée** si elle est majorée et minorée.

Si (u_n) est croissante, alors $u_n \geq u_{n_0}$ pour tout $n \in I$; si elle est décroissante, $u_n \leq u_{n_0}$.

RAPPEL — Suites arithmétiques et géométriques

	Arithmétique de raison r	Géométrique de raison q
Pour le montrer	$u_{n+1} - u_n = r$	$u_{n+1} = q u_n$
Terme général	$u_n = u_p + (n - p)r$	$u_n = u_p \times q^{n-p}$
Somme de u_p à u_n	$\frac{n-p+1}{2} (u_p + u_n)$	$u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \quad (q \neq 1)$
a, b, c consécutifs	$2b = a + c$	$b^2 = ac$

Dans les sommes, $n - p + 1$ est le **nombre de termes**.

RAPPEL — Le raisonnement par récurrence : le modèle de rédaction

Pour montrer que $(\forall n \geq n_0) P(n)$:

Étape 1 : Initialisation. On vérifie $P(n_0)$.

Étape 2 : Hérédité. Soit $n \geq n_0$. On suppose $P(n)$ vraie (hypothèse de récurrence) et on montre $P(n+1)$.

Étape 3 : Conclusion. D'après le principe de récurrence, $(\forall n \geq n_0) P(n)$.

Astuce pour $u_{n+1} = f(u_n)$: dans l'hérédité, si f est *croissante* sur l'intervalle considéré, on applique simplement f aux inégalités : $a \leq u_n \leq b \implies f(a) \leq u_{n+1} \leq f(b)$.

1.2 Limite d'une suite

ACTIVITÉ 2 — Observer le comportement à l'infini

On considère les suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par

$$a_n = n^2, \quad b_n = 1 + \frac{1}{n}, \quad c_n = (-1)^n.$$

n	1	10	100	1000	10^6
a_n	1	100	10^4	10^6	10^{12}
b_n	2	1,1	1,01	1,001	1,000001
c_n	-1	1	1	1	1

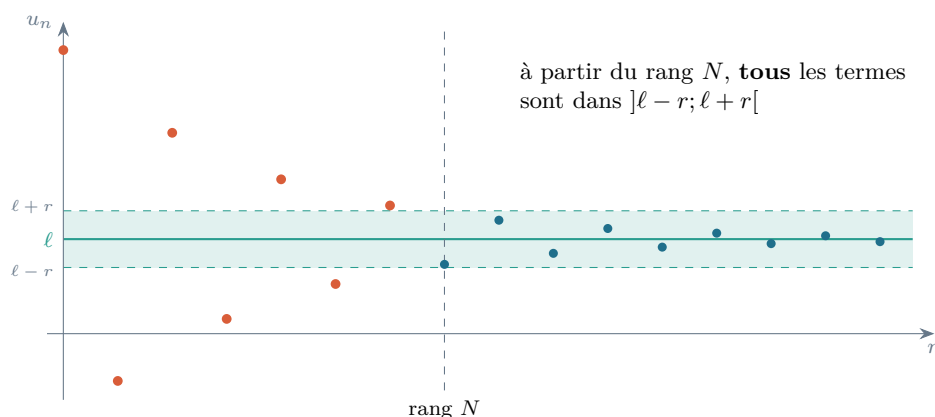
Décrire, pour chacune, ce que deviennent les termes quand n devient très grand.

DÉFINITION 1 — Limite finie — suite convergente

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que la suite (u_n) **a pour limite** ℓ (ou **converge vers** ℓ) si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient *tous les termes de la suite à partir d'un certain rang*. On note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \quad \text{ou} \quad \lim u_n = \ell.$$

Une suite qui admet une limite finie est dite **convergente**.



DÉFINITION 2 — Limite infinie

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ si tout intervalle $]A; +\infty[$ ($A \in \mathbb{R}$) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ si tout intervalle $] -\infty; B[$ ($B \in \mathbb{R}$) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente** : soit elle tend vers $\pm\infty$, soit elle n'a pas de limite.

REMARQUE 1

- La suite $((-1)^n)$ prend alternativement les valeurs -1 et 1 : elle n'a **aucune limite**, ni finie ni infinie. Elle est divergente.
- Lorsqu'elle existe, la limite d'une suite est **unique**.

$$\blacktriangleright \lim u_n = \ell \iff \lim(u_n - \ell) = 0 \iff \lim |u_n - \ell| = 0.$$

1.3 Suites de référence et opérations

PROPRIÉTÉ 1 — Limites des suites de référence (admisses)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

- $\blacktriangleright \lim n^p = +\infty$ (en particulier $\lim n = \lim n^2 = +\infty$)
- $\blacktriangleright \lim \frac{1}{n^p} = 0$ (en particulier $\lim \frac{1}{n} = 0$)
- $\blacktriangleright \lim \sqrt[n]{n} = +\infty$ et $\lim \sqrt[n]{n} = +\infty$
- $\blacktriangleright \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 0$ et $\lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 0$

PROPRIÉTÉ 2 — Suites de la forme $u_n = f(n)$

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a; +\infty[$ et $u_n = f(n)$ pour $n \geq a$. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (ℓ réel, $+\infty$ ou $-\infty$), alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

En conséquence, **les opérations sur les limites de fonctions en $+\infty$ restent valables pour les suites** (sommes, produits, quotients, formes indéterminées, terme dominant, conjugué).

EXEMPLE 1 — Calculer des limites de suites

- $\blacktriangleright \lim \left(\frac{1}{n^2} - \frac{5}{\sqrt[3]{n}} + 1 \right) = 0 - 0 + 1 = 1.$
- $\blacktriangleright \lim \frac{n^2 - 5n + 1}{-n^2 + 6n + 7} = \lim \frac{n^2}{-n^2} = -1.$
- $\blacktriangleright \lim (n - 3\sqrt{n}) = \lim \sqrt{n}(\sqrt{n} - 3) = +\infty$ (forme « $+\infty - \infty$ » levée par factorisation).
- $\blacktriangleright \lim (\sqrt{n^2 - 5n + 3} - n)$: par le conjugué,

$$\sqrt{n^2 - 5n + 3} - n = \frac{-5n + 3}{\sqrt{n^2 - 5n + 3} + n} = \frac{-5 + \frac{3}{n}}{\sqrt{1 - \frac{5}{n} + \frac{3}{n^2}} + 1} \rightarrow -\frac{5}{2}.$$

PROPRIÉTÉ 3 — Passage à la limite dans une inégalité

Soient (u_n) et (v_n) deux suites **convergentes**.

- $\blacktriangleright$ Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$, alors $\lim u_n \leq \lim v_n$.
- $\blacktriangleright$ En particulier, si (u_n) converge et est majorée par M (resp. minorée par m), alors $\lim u_n \leq M$ (resp. $\geq m$).

Attention : même si $u_n > 0$ pour tout n , on peut seulement conclure $\lim u_n \geq 0$. Exemple : $\frac{1}{n} > 0$ mais $\lim \frac{1}{n} = 0$.

APPLICATION 1

Calculer les limites des suites suivantes.

1) $u_n = n^2 - 5n + 1$

2) $u_n = \frac{5n^2 + 4}{4n^2 + 3n}$

3) $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$

4) $u_n = \frac{n+1}{\sqrt{n}}$

5) $u_n = \frac{(-1)^n + 5n^4}{n^4}$

6) $u_n = \sqrt{3n^2 + 2} - n$

SOLUTION 2

1) $\lim n^2 = +\infty$ (terme dominant) : $\lim u_n = +\infty$.

2) $\lim \frac{5n^2}{4n^2} = \frac{5}{4}$.

3) $u_n = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \rightarrow 0$.

4) $u_n = \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow +\infty$.

5) $u_n = 5 + \frac{(-1)^n}{n^4}$ et $\left| \frac{(-1)^n}{n^4} \right| = \frac{1}{n^4} \rightarrow 0$, donc $\lim u_n = 5$.

6) $u_n = n \left(\sqrt{3 + \frac{2}{n^2}} - 1 \right)$ et $\sqrt{3} - 1 > 0$, donc $\lim u_n = +\infty$.

1.4 Critères de convergence par comparaison**PROPOSITION 1 — Les trois critères (admis)**

Soit α un réel **strictement positif** et $\ell \in \mathbb{R}$.

1) **Minoration / majoration.** Si, à partir d'un certain rang, $v_n \geq \alpha u_n$:

$$\lim u_n = +\infty \implies \lim v_n = +\infty, \quad \lim v_n = -\infty \implies \lim u_n = -\infty.$$

2) **Théorème des gendarmes.** Si, à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n \leq w_n$ et $\lim v_n = \lim w_n = \ell$, alors $\lim u_n = \ell$.

3) **Majoration de l'écart.** Si, à partir d'un certain rang, $|u_n - \ell| \leq \alpha v_n$ et $\lim v_n = 0$, alors $\lim u_n = \ell$.

EXEMPLE 2 — Critère 1 : une minoration

Soit $u_n = \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) + n^3 + 1$. Comme $\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) \geq -1$, on a

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \geq -1 + n^3 + 1 = n^3.$$

Or $\lim n^3 = +\infty$, donc $\lim u_n = +\infty$.

EXEMPLE 3 — Critère 2 : les gendarmes

Soit $u_n = \frac{\sin n}{n}$ pour $n \geq 1$. Comme $-1 \leq \sin n \leq 1$ et $n > 0$:

$$-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}.$$

Or $\lim \left(-\frac{1}{n}\right) = \lim \frac{1}{n} = 0$, donc $\lim \frac{\sin n}{n} = 0$.

EXEMPLE 4 — Critère 3 : majorer l'écart

Soit $u_n = 1 + \frac{(-1)^n \pi}{n+2}$. Pour $n \geq 1$:

$$|u_n - 1| = \frac{|(-1)^n| \pi}{n+2} = \frac{\pi}{n+2} < \pi \times \frac{1}{n}.$$

Avec $\alpha = \pi$ et $v_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, on conclut $\lim u_n = 1$.

APPLICATION 2

- 1) Déterminer $\lim(n^2 + (-1)^n)$.
- 2) Soit $u_n = \frac{\cos(n^2)}{\sqrt[5]{n}} - 4$ pour $n \geq 1$. Montrer que $-\frac{1}{\sqrt[5]{n}} - 4 \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt[5]{n}} - 4$, puis en déduire $\lim u_n$.
- 3) Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Montrer par récurrence que $u_n \geq n$, puis en déduire $\lim u_n$.

SOLUTION 3

- 1) $(-1)^n \geq -1$, donc $n^2 + (-1)^n \geq n^2 - 1 \rightarrow +\infty$: la limite vaut $+\infty$.
- 2) $-1 \leq \cos(n^2) \leq 1$ et $\sqrt[5]{n} > 0$ donnent l'encadrement demandé. Les deux bornes tendent vers $0 - 4 = -4$; d'après le théorème des gendarmes, $\lim u_n = -4$.
- 3) *Initialisation* : $u_0 = 0 \geq 0$. *Hérédité* : si $u_n \geq n$, alors $u_{n+1} = 2u_n + 1 \geq 2n + 1 \geq n + 1$ (car $n \geq 0$). Donc $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \geq n$, et comme $\lim n = +\infty$, on obtient $\lim u_n = +\infty$.

1.5 Monotonie et convergence**PROPOSITION 2 — Théorème de la convergence monotone (admis)**

- Toute suite **croissante et majorée** est convergente.
- Toute suite **décroissante et minorée** est convergente.

De plus, toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$, et toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

REMARQUE 2 — Ce que le théorème ne dit pas

Il assure l'**existence** de la limite, pas sa valeur. Si (u_n) est croissante et majorée par 3, on sait seulement que $\lim u_n \leq 3$: la limite peut être strictement inférieure à 3. Pour la calculer, on utilise une autre méthode (formule explicite, ou section ??).

EXEMPLE 5 — Comment rédiger une preuve de convergence

Soit (u_n) définie par $u_0 = \frac{5}{4}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{2}$.

Étape 1 : Majoration par récurrence. $u_0 = \frac{5}{4} < 2$. Si $u_n < 2$, alors $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{2} < \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = 2$. Donc $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n < 2$.

Étape 2 : Monotonie.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3}{2} - \frac{3}{4}u_n = \frac{3}{4}(2 - u_n) > 0,$$

car $u_n < 2$. La suite est donc strictement croissante.

Conclusion : (u_n) est croissante et majorée par 2 : elle est convergente.

1.6 Les suites (a^n) et (n^r) **PROPRIÉTÉ 4 — Limite de (a^n) et de (n^r)**

a	$a > 1$	$a = 1$	$-1 < a < 1$	$a \leq -1$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n$	$+\infty$	1	0	pas de limite

$r \in \mathbb{Q}^*$	$r > 0$	$r < 0$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^r$	$+\infty$	0

EXEMPLE 6 — Mettre en facteur le terme dominant

- ▶ $\left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$; $\left(\frac{8}{3}\right)^n \rightarrow +\infty$; $\left(-\frac{5}{2}\right)^n$ n'a pas de limite car $-\frac{5}{2} \leq -1$.
- ▶ $n^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n} \rightarrow +\infty$; $n^{-\frac{5}{2}} \rightarrow 0$.
- ▶ $\frac{3^n + 2^n}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(\frac{2}{4}\right)^n \rightarrow 0$.
- ▶ $\frac{5^n + 2^n}{5^n - 2^n} = \frac{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n} \rightarrow 1$.
- ▶ $2^n - 3^n = 3^n \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right] \rightarrow +\infty \times (-1) = -\infty$.
- ▶ $n^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{2}{3}} = n^{\frac{2}{3}} \left(n^{-\frac{1}{3}} - 1\right) \rightarrow +\infty \times (-1) = -\infty$.

APPLICATION 3

Calculer la limite de (u_n) dans chacun des cas suivants.

1) $u_n = \left(\frac{3}{8}\right)^n + \left(\frac{5}{4}\right)^n$

3) $u_n = \frac{4^n - 3^n}{4^n + 3^n}$

2) $u_n = \frac{5^n}{(-4)^n}$

4) $u_n = \frac{2}{7^n}$

SOLUTION 4

1) $\left(\frac{3}{8}\right)^n \rightarrow 0$ et $\left(\frac{5}{4}\right)^n \rightarrow +\infty$, donc $\lim u_n = +\infty$.

2) $u_n = \left(-\frac{5}{4}\right)^n$ avec $-\frac{5}{4} \leq -1$: pas de limite.

3) $u_n = \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n} \rightarrow 1$.

4) $u_n = 2 \left(\frac{1}{7}\right)^n \rightarrow 0$.

1.7 Suites de la forme $v_n = f(u_n)$

PROPRIÉTÉ 5 — Limite de $f(u_n)$ (admise)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et (u_n) une suite telle que $u_n \in I$ pour tout n . Si

$$\lim u_n = \ell \quad \text{et} \quad f \text{ est continue en } \ell,$$

alors la suite $v_n = f(u_n)$ converge et $\lim f(u_n) = f(\ell)$.

EXEMPLE 7 — Trois applications directes

- $\frac{\pi n + 2}{4n + 3} \rightarrow \frac{\pi}{4}$ et $\cos$ est continue en $\frac{\pi}{4}$, donc $\lim \cos \left(\frac{\pi n + 2}{4n + 3} \right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- $\frac{7n + 2}{3n - 1} \rightarrow \frac{7}{3}$ et $\sqrt{}$ est continue en $\frac{7}{3}$, donc $\lim \sqrt{\frac{7n + 2}{3n - 1}} = \sqrt{\frac{7}{3}}$.
- $(-0,8)^n \rightarrow 0$, donc $\frac{\pi + (-0,8)^n}{6 + (-0,8)^n} \rightarrow \frac{\pi}{6}$ et $\lim \tan \left(\frac{\pi + (-0,8)^n}{6 + (-0,8)^n} \right) = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

1.8 Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ **PROPOSITION 3 — Limite d'une suite récurrente (admise)**

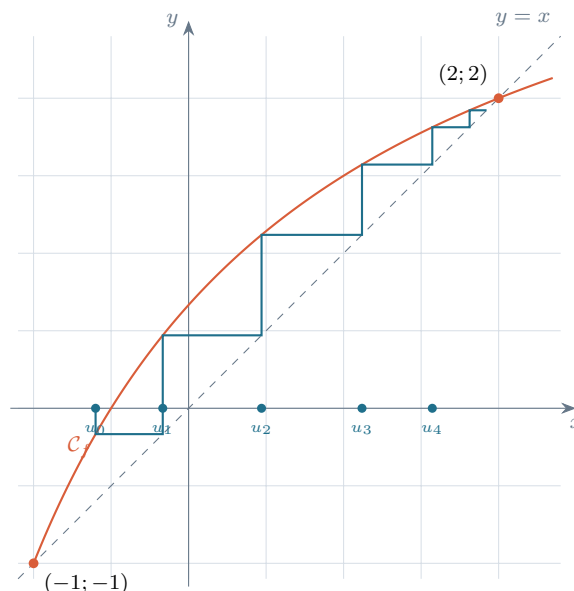
Soit I un **intervalle fermé** et f une fonction définie sur I . Soit (u_n) la suite définie par u_{n_0} et $u_{n+1} = f(u_n)$. Si

- 1) $u_{n_0} \in I$;
- 2) f est **continue** sur I ;
- 3) $f(I) \subset I$;
- 4) la suite (u_n) est **convergente**,

alors sa limite ℓ est une **solution de l'équation** $f(x) = x$ dans I .

REMARQUE 3 — Bien utiliser le théorème

- Si les termes sont dans un intervalle ouvert comme $]a; b[$, on applique le théorème sur le **fermé** $[a; b]$: c'est ce qui garantit que $\ell \in I$.
- Si $f(x) = x$ a plusieurs solutions dans I , on choisit grâce à la monotonie : si (u_n) est croissante, $\ell \geq u_{n_0}$; si elle est décroissante, $\ell \leq u_{n_0}$.
- Graphiquement, les solutions de $f(x) = x$ sont les abscisses des points d'intersection de (C_f) avec la droite $y = x$.



Construction « en escalier » des termes de $u_{n+1} = \frac{4u_n + 2}{u_n + 3}$ (ici avec $u_0 = -0,6$) : les termes montent vers le point fixe 2.

EXEMPLE 8 — Une étude complète rédigée

Soit $f(x) = \frac{4x+2}{x+3}$ sur $I = [-1; 2]$, et (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Étape 1 : Variations de f . $f'(x) = \frac{4(x+3) - (4x+2)}{(x+3)^2} = \frac{10}{(x+3)^2} > 0$: f est continue et strictement croissante sur I .

Étape 2 : Stabilité. $f(-1) = -1$ et $f(2) = 2$, donc $f(I) = [f(-1); f(2)] = [-1; 2] = I$.

Étape 3 : Encadrement par récurrence. $u_0 = 1 \in I$. Si $u_n \in I$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \in f(I) = I$. Donc $(\forall n \in \mathbb{N}) -1 \leq u_n \leq 2$.

Étape 4 : Monotonie.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n + 2 - u_n^2 - 3u_n}{u_n + 3} = \frac{-u_n^2 + u_n + 2}{u_n + 3} = \frac{-(u_n + 1)(u_n - 2)}{u_n + 3} \geq 0,$$

car $u_n + 1 \geq 0$, $u_n - 2 \leq 0$ et $u_n + 3 > 0$. La suite est croissante.

Étape 5 : Convergence. Croissante et majorée par 2, elle converge vers un réel ℓ .

Étape 6 : Calcul de ℓ . Les quatre hypothèses du théorème sont réunies, donc $f(\ell) = \ell$:

$$\frac{4\ell + 2}{\ell + 3} = \ell \iff \ell^2 - \ell - 2 = 0 \iff \ell = -1 \text{ ou } \ell = 2.$$

Comme la suite est croissante, $\ell \geq u_0 = 1$.

Conclusion : $\lim u_n = 2$.

RAPPEL — Les deux méthodes classiques du baccalauréat

Forme $u_{n+1} = au_n + b$ ($a \neq 1$). On cherche le point fixe $\ell = \frac{b}{1-a}$ et on pose $v_n = u_n - \ell$: la suite (v_n) est **géométrique de raison** a . On en déduit v_n , puis $u_n = v_n + \ell$, puis la limite.

Forme homographique $u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$. L'énoncé propose une suite auxiliaire :

- ▶ si $f(x) = x$ a **deux** solutions α et β , on pose $v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$: elle est **géométrique** ;
- ▶ si $f(x) = x$ a une solution **double** α , on pose $v_n = \frac{1}{u_n - \alpha}$: elle est **arithmétique** (c'est le cas de l'activité du début du chapitre).

Dans tous les cas, on exprime u_n en fonction de v_n puis de n .

EXEMPLE 9 — Méthode $au_n + b$: Examen national 2016, session de rattrapage

Soit $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16}$.

- *Minoration.* $u_0 = 2 > 1$; si $u_n > 1$, alors $u_{n+1} > \frac{1}{16} + \frac{15}{16} = 1$. Donc $u_n > 1$ pour tout n .
- *Monotonie.* $u_{n+1} - u_n = -\frac{15}{16}(u_n - 1) < 0$: la suite est **décroissante**, minorée par 1, donc convergente.
- *Suite auxiliaire.* $v_n = u_n - 1$ vérifie $v_{n+1} = \frac{1}{16}u_n - \frac{1}{16} = \frac{1}{16}v_n$: elle est géométrique de raison $\frac{1}{16}$ et $v_0 = 1$. Donc

$$u_n = 1 + \left(\frac{1}{16}\right)^n \rightarrow 1.$$

Fiche résumé

RAPPEL — L'essentiel du chapitre sur une page

Pour montrer qu'une suite converge

- ▶ croissante et majorée, ou décroissante et minorée ;
- ▶ encadrement $v_n \leq u_n \leq w_n$ (gendarmes) ;
- ▶ $|u_n - \ell| \leq \alpha v_n$ avec $v_n \rightarrow 0$;
- ▶ formule explicite et limites de référence.

Pour montrer que $u_n \rightarrow +\infty$

- ▶ $u_n \geq \alpha v_n$ avec $v_n \rightarrow +\infty$;
- ▶ croissante non majorée.

Limites de référence

- ▶ $n^r \rightarrow +\infty$ si $r > 0$, $\rightarrow 0$ si $r < 0$;
- ▶ $a^n \rightarrow +\infty$ si $a > 1$; $\rightarrow 0$ si $|a| < 1$; pas de limite si $a \leq -1$.

Suite $u_{n+1} = f(u_n)$ — ordre des questions

- encadrement de u_n par récurrence ;
- signe de $u_{n+1} - u_n$: monotonie ;
- convergence (théorème monotone) ;
- f continue sur I fermé, $f(I) \subset I$;
- résoudre $f(x) = x$ et choisir la bonne solution.

Suites auxiliaires

- ▶ $u_{n+1} = au_n + b$: $v_n = u_n - \ell$ géométrique ;
- ▶ homographique : $v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$ géométrique, ou $v_n = \frac{1}{u_n - \alpha}$ arithmétique.

Continuité et suites

- ▶ $u_n \rightarrow \ell$ et f continue en $\ell \implies f(u_n) \rightarrow f(\ell)$.

Devoir à la maison

DEVOIR 1 — Synthèse du chapitre

Exercice 1 (Examen national 2016, session normale). ★★★ Soit $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{3 + u_n}{5 - u_n}$.

- Vérifier que $u_{n+1} - 3 = \frac{4(u_n - 3)}{2 + (3 - u_n)}$, puis montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n < 3$.

- 2) a) Montrer que $v_n = \frac{u_n - 1}{3 - u_n}$ définit une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, et en déduire $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
- b) Montrer que $u_n = \frac{1 + 3v_n}{1 + v_n}$, puis déterminer $\lim u_n$.

Exercice 2 (Examen national 2017, session de rattrapage). ★★★ Soit $u_0 = 17$ et $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 12$.

- 1) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n > 16$.
- 2) Montrer que (u_n) est décroissante, et en déduire qu'elle converge.
- 3) Soit $v_n = u_n - 16$. Montrer que (v_n) est géométrique et en déduire que $u_n = 16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$.
- 4) Déterminer $\lim u_n$, puis le plus petit entier n tel que $u_n < 16,0001$.

Exercice 3. ★★★ Soit $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ sur $\mathbb{R}^+$, et (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

- 1) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+) f(x) \leq x$ et que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
- 2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) 0 < u_n < 1$.
- 3) Montrer que (u_n) est décroissante, puis qu'elle converge, et déterminer sa limite.