

Ensembles et applications

Opérations sur les ensembles ▪ Image directe et réciproque ▪ Injection, surjection, bijection

Informations du document

Niveau	Première année du Baccalauréat
Filière	Sciences Mathématiques
Année scolaire	2026–2027
Établissement	Lycée Technique Settat

IDENTITÉ DU PROFESSEUR

Khalid Legdani

Professeur d'enseignement secondaire qualifiant

Discipline	Mathématiques
Téléphone	+212 7 08 27 07 29
Site web	www.lyceemaroc.com

Table des matières

1 Ensembles et applications	3
Le chapitre en un coup d'œil	3
Partie I — Les ensembles	4
1.1 Extension et compréhension	4
1.2 Inclusion et égalité	5
1.3 Ensemble des parties	8
1.4 Le complémentaire	8
1.5 Intersection	9
1.6 Réunion	10
1.7 Règles de calcul	11
1.8 Différence de deux ensembles	12
1.9 Différence symétrique	14
1.10 Produit cartésien	15
Partie II — Les applications	17
1.11 Définition d'une application	17
1.12 Image directe d'une partie	18
1.13 Image réciproque d'une partie	19
1.14 Égalité de deux applications	20
1.15 Restriction et prolongement	21
1.16 Application injective	22
1.17 Application surjective	24
1.18 Application bijective	25
1.19 Application réciproque d'une bijection	26
1.20 Composition des applications	27
Fiche résumé	29

Ensembles et applications

Le chapitre en un coup d'œil

Volume horaire	Capacités exigibles	Prérequis
07 heures <i>Partie I</i>	• Déterminer un ensemble par compréhension ou par extension ; • Maîtriser la relation entre les règles de la logique et les opérations sur les ensembles.	Ordre dans $\mathbb{R}$ Notions de logique (chapitre 01)
08 heures <i>Partie II</i>	• Déterminer l'image et l'image réciproque d'un ensemble par une application ; • Déterminer la bijection et la bijection réciproque d'une application et son utilisation dans la résolution de problèmes ; • Déterminer la composée de deux applications et la décomposition d'une application en deux applications en vue d'explorer ses propriétés.	Les ensembles Les fonctions numériques

RAPPEL — Pourquoi ce chapitre compte

Ce chapitre ne sert pas seulement à apprendre un vocabulaire. Il est la **mise en œuvre directe du chapitre 01** : chaque opération sur les ensembles est la traduction d'un connecteur logique.

Logique	Ensembles
$p(x) \wedge q(x)$	$A \cap B$
$p(x) \vee q(x)$	$A \cup B$
$\overline{p(x)}$	$\overline{A}$ (complémentaire)
$p(x) \implies q(x)$	$A \subset B$
$p(x) \iff q(x)$	$A = B$

C'est pourquoi les lois de De Morgan de la logique redonnent, mot pour mot, les lois de De Morgan des ensembles. Les notions introduites ici (ensemble des parties, produit cartésien, application bijective) resserviront dans *tous* les chapitres suivants, et notamment en dénombrement et en arithmétique.

Partie I — Les ensembles

Extension et compréhension ■ Inclusion ■ $\mathcal{P}(E)$ ■ Opérations ■ Produit cartésien

07 heures

1.1 Extension et compréhension

DÉFINITION 1

Un **ensemble** E est une collection d'objets. Chacun de ces objets est appelé **élément** de cet ensemble. Si x est un élément de E , on dit que x **appartient** à E et l'on note $x \in E$. Dans le cas contraire, on note $x \notin E$.

PROPRIÉTÉ 1 — Les deux façons d'écrire un ensemble

► **En extension** : on donne la liste exhaustive de tous les éléments.

$$E = \{1; 2; 3\}$$

On utilise des *accolades*, jamais des parenthèses, et l'ordre n'a aucune importance : $\{1; 2; 3\} = \{3; 1; 2\}$.

► **En compréhension** : on donne la propriété qui caractérise les éléments.

$$E = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 1\}$$

REMARQUE 1

- L'**ensemble vide** ne contient aucun élément ; il se note $\emptyset$ ou $\{\}$, **mais jamais** $\{\emptyset\}$ — ce dernier est un ensemble à un élément !
- Un ensemble à un seul élément s'appelle un **singleton** ; un ensemble à deux éléments distincts, une **paire**. On a $\{a; b\} = \{b; a\}$.
- Un **diagramme de Venn** est une courbe fermée qui entoure les éléments d'un ensemble.

APPLICATION 1 — Passer d'une écriture à l'autre

1) Écrire en extension les ensembles

$$A = \left\{x \in \mathbb{Z} / -\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\right\}, \quad B = \left\{x \in \mathbb{R} / x^2 + x + 1 = 0\right\},$$

$$C = \left\{x \in \mathbb{Z} / x(x+1)(x^2-2) = 0\right\}.$$

2) Écrire en compréhension les ensembles

$$E = \{0; 2; 4; 6; 8; 10; \dots\}, \quad F = \{1; 3; 5; 7; 9; 11; \dots\},$$

$$G = \{0; 1; 4; 9; 16; 25; \dots\}.$$

SOLUTION 1

1) • Les entiers relatifs compris entre $-2,5$ et $1,5$ sont $-2, -1, 0$ et 1 :

$$A = \{-2; -1; 0; 1\}.$$

- Pour $x^2 + x + 1$, $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$: pas de racine réelle, donc $B = \emptyset$.
- $x(x+1)(x^2-2) = 0$ donne $x = 0$, $x = -1$ ou $x = \pm\sqrt{2}$. Mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$, donc

$$C = \{-1; 0\}.$$

△ Attention : l'ensemble de référence ($\mathbb{Z}$ ici) élimine des solutions. Dans $\mathbb{R}$, on aurait obtenu quatre éléments.

2) $E = \{2k / k \in \mathbb{N}\}$, $F = \{2k+1 / k \in \mathbb{N}\}$, $G = \{k^2 / k \in \mathbb{N}\}$.

APPLICATION 2 — Un ensemble défini par une condition arithmétique

Écrire en extension l'ensemble $A = \left\{x \in \mathbb{Z} / \frac{x+1}{2x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$.

SOLUTION 2

Étape 1 : Analyse — chercher une condition nécessaire. Soit $x \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{x+1}{2x+1} \in \mathbb{Z}$. On multiplie par 2 pour faire apparaître le dénominateur au numérateur :

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{2x+1} \in \mathbb{Z} &\implies \frac{2x+2}{2x+1} \in \mathbb{Z} \implies \frac{(2x+1)+1}{2x+1} \in \mathbb{Z} \implies 1 + \frac{1}{2x+1} \in \mathbb{Z} \\ &\implies \frac{1}{2x+1} \in \mathbb{Z} \implies (2x+1) \text{ divise } 1 \\ &\implies 2x+1 = 1 \text{ ou } 2x+1 = -1 \implies x = 0 \text{ ou } x = -1. \end{aligned}$$

Donc $A \subset \{-1; 0\}$.

Étape 2 : Synthèse — vérifier la réciproque. Les implications ci-dessus ne sont pas toutes des équivalences : il faut tester les deux candidats.

$$x = 0 : \frac{0+1}{2 \times 0 + 1} = 1 \in \mathbb{Z} \quad \checkmark \qquad x = -1 : \frac{-1+1}{2 \times (-1) + 1} = 0 \in \mathbb{Z} \quad \checkmark$$

Conclusion : $A = \{-1; 0\}$.

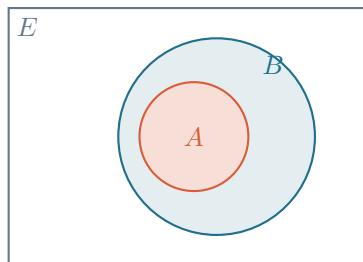
Méthode à retenir. Pour déterminer un ensemble défini par une condition, on procède presque toujours en deux temps : **analyse** (conditions nécessaires, qui donnent une inclusion) puis **synthèse** (vérification, qui donne l'autre).

1.2 Inclusion et égalité**DÉFINITION 2**

Soient A et B deux parties d'un ensemble E .

On dit que A est **incluse** dans B — ou que A est une **partie** de B , ou un **sous-ensemble** de B — si tout élément de A est un élément de B . On note $A \subset B$:

$$A \subset B \iff [(\forall x \in E), x \in A \implies x \in B].$$



PROPRIÉTÉ 2

Soient A , B et C trois parties d'un ensemble E .

- $A \not\subset B \iff [(\exists x \in E), x \in A \text{ et } x \notin B]$;
- $\emptyset \subset A$ et $A \subset A$;
- si $A \subset B$ et $B \subset C$, alors $A \subset C$ (*transitivité*).

DÉFINITION 3 — Égalité de deux ensembles

Deux ensembles sont **égaux** si et seulement s'ils ont les mêmes éléments :

$$A = B \iff [(\forall x \in E), x \in A \iff x \in B] \iff (A \subset B \text{ et } B \subset A).$$

REMARQUE 2 — La méthode reine du chapitre

Pour montrer que $A = B$, on montre presque toujours la **double inclusion** : $A \subset B$, puis $B \subset A$. C'est le raisonnement par double implication du chapitre 01, appliqué aux ensembles.

APPLICATION 3

On considère les ensembles

$$A = \{-3; -1; 0; 1; 3\}, \quad B = \left\{x \in \mathbb{Z} / \frac{4}{|x|+1} \in \mathbb{Z}\right\},$$

$$C = \{2k+1 / k \in \mathbb{Z}\}, \quad D = \left\{\frac{2k'-1}{3} / k' \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Montrer que $A \subset B$, $C \subset D$ et $D \not\subset C$.

SOLUTION 3

1) $A \subset B$. Soit $x \in A$. On calcule $\frac{4}{|x|+1}$ pour chacun des cinq éléments :

x	-3	-1	0	1	3
$\frac{4}{ x +1}$	1	2	4	2	1

Dans les cinq cas le résultat est un entier, donc $x \in B$. D'où $A \subset B$.

2) $C \subset D$. Soit $x \in C$: il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2k+1$. Cherchons $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \frac{2k'-1}{3}$:

$$\frac{2k'-1}{3} = 2k+1 \iff 2k'-1 = 6k+3 \iff 2k' = 6k+4 \iff k' = 3k+2.$$

Comme $k \in \mathbb{Z}$, on a bien $k' = 3k+2 \in \mathbb{Z}$. Donc $x \in D$, et $C \subset D$.

3) $D \not\subset C$. Il suffit d'un contre-exemple. Pour $k' = 0$: $\frac{2 \times 0 - 1}{3} = -\frac{1}{3} \in D$. Or $-\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$, donc $-\frac{1}{3} \notin C$.
Conclusion : $D \not\subset C$.

APPLICATION 4 — Montrer une égalité par double inclusion

On considère $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \left| 1 - \frac{x}{2} \right| < 1 \right\}$ et $B =]0; 4[$. Montrer que $A = B$.

SOLUTION 4

Ici les deux inclusions se font d'un coup, par équivalences successives. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x \in A &\iff \left| 1 - \frac{x}{2} \right| < 1 \iff -1 < 1 - \frac{x}{2} < 1 \\ &\iff -2 < -\frac{x}{2} < 0 && \text{(on retranche 1)} \\ &\iff 4 > x > 0 && \text{(on multiplie par } -2 < 0 : \text{ les inégalités changent de sens)} \\ &\iff x \in]0; 4[\iff x \in B. \end{aligned}$$

Conclusion : $A = B$.

APPLICATION 5 — Un système dans $\mathbb{Z}^2$

Écrire en extension $H = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \mid mn + 2 - 3n = 7\}$.

SOLUTION 5

Soit $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$. On factorise pour se ramener à un produit d'entiers :

$$mn + 2 - 3n = 7 \iff mn - 3n = 5 \iff n(m - 3) = 5.$$

Le produit de deux entiers vaut 5 : il n'y a que quatre possibilités, car les diviseurs de 5 dans $\mathbb{Z}$ sont ± 1 et ± 5 .

n	5	-5	1	-1
$m - 3$	1	-1	5	-5
m	4	2	8	-2

Conclusion : $H = \{(4; 5); (2; -5); (8; 1); (-2; -1)\}$.

1.3 Ensemble des parties

DÉFINITION 4

Soit E un ensemble. L'**ensemble des parties** de E , noté $\mathcal{P}(E)$, est l'ensemble de tous les sous-ensembles de E :

$$A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E.$$

PROPRIÉTÉ 3

- ▶ $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$;
- ▶ $a \in E \iff \{a\} \in \mathcal{P}(E)$;
- ▶ si E est un ensemble fini à n éléments, alors $\mathcal{P}(E)$ possède 2^n éléments.

△ **Deux symboles à ne pas confondre.** On écrit $A \subset E$ (inclusion, entre deux ensembles) et $A \in \mathcal{P}(E)$ (appartenance, car A est un *élément* de $\mathcal{P}(E)$). Pour $a \in E$, on a $\{a\} \subset E$ et $\{a\} \in \mathcal{P}(E)$, mais $a \in E$ et $a \notin \mathcal{P}(E)$.

EXEMPLE 1

- Si $E = \{a; b\}$, alors $\mathcal{P}(E)$ a $2^2 = 4$ éléments :

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{a; b\}\}.$$

- Si $F = \{1; 2; 3\}$, alors $\mathcal{P}(F)$ a $2^3 = 8$ éléments :

$$\mathcal{P}(F) = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1; 2\}; \{1; 3\}; \{2; 3\}; \{1; 2; 3\}\}.$$

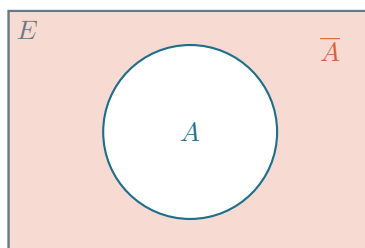
REMARQUE 3

Pour ne rien oublier, on énumère les parties **par nombre d'éléments croissant** : d'abord $\emptyset$, puis les singletons, puis les paires, etc. Le nombre de parties à k éléments sera calculé au chapitre 14 (*Dénombrement*); on y retrouvera 2^n comme somme de ces nombres.

1.4 Le complémentaire**DÉFINITION 5**

Soit A une partie d'un ensemble E . Le **complémentaire** de A dans E , noté $\overline{A}$ ou $\mathcal{C}_E^A$, est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A :

$$\overline{A} = \{x \in E / x \notin A\}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad (\forall x \in E), (x \in \overline{A} \iff x \notin A).$$



PROPRIÉTÉ 4

Soient A et B deux parties d'un ensemble E .

- ▶ $\overline{\overline{E}} = \emptyset, \quad \overline{\emptyset} = E, \quad \overline{(\overline{A})} = A;$
- ▶ si $A = \{x \in E / p(x)\}$, alors $\overline{A} = \{x \in E / \overline{p(x)}\};$
- ▶ $A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A}.$

Démonstration du dernier point :

Soient A et B deux parties de E .

$$\begin{aligned}
 A \subset B &\iff [(\forall x \in E), x \in A \implies x \in B] \\
 &\iff [(\forall x \in E), x \notin B \implies x \notin A] && \text{(contraposée)} \\
 &\iff [(\forall x \in E), x \in \overline{B} \implies x \in \overline{A}] \iff \overline{B} \subset \overline{A}.
 \end{aligned}$$

APPLICATION 6

- 1) On considère $A = [1; +\infty[$ et $B = \{x \in \mathbb{N} / x^2 - 4x > 0\}$. Déterminer $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}^A$ et $\mathcal{C}_{\mathbb{N}}^B$.
- 2) Soient A et B deux parties d'un ensemble E . Montrer que $A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A}$.

SOLUTION 6

- 1) • $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}^A =]-\infty; 1[.$
- $x^2 - 4x > 0 \iff x(x - 4) > 0 \iff (x < 0 \text{ ou } x > 4).$ Dans $\mathbb{N}$, cela donne $x \geq 5$, donc $B = \{5; 6; 7; \dots\}$ et

$$\mathcal{C}_{\mathbb{N}}^B = \{0; 1; 2; 3; 4\}.$$

△ **Attention :** 0 n'est pas dans B bien que $0 \times (0 - 4) = 0$ ne soit *pas* strictement positif — l'inégalité est stricte.

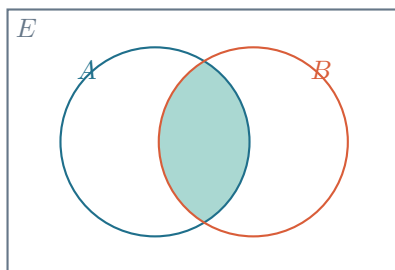
- 2) C'est la démonstration donnée ci-dessus.

1.5 Intersection

DÉFINITION 6

Soient A et B deux parties d'un ensemble E . L'**intersection** de A et B , notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments de E qui sont dans A et dans B :

$$A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}, \quad x \in A \cap B \iff (x \in A \wedge x \in B).$$



PROPRIÉTÉ 5

Soient A , B et C des parties d'un ensemble E .

- ▶ $A \cap B = B \cap A$;
- ▶ $A \cap A = A$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$;
- ▶ $A \cap E = A$ et $A \cap \emptyset = \emptyset$;
- ▶ $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$;
- ▶ $A \subset B \iff A \cap B = A$;
- ▶ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (*associativité*).

Démonstration de l'associativité :

Ce calcul est le modèle de *toutes* les démonstrations d'égalités ensemblistes : on traduit en logique, on utilise les règles du chapitre 01, on retraduit.

$$\begin{aligned}
 x \in A \cap (B \cap C) &\iff x \in A \text{ et } x \in (B \cap C) \\
 &\iff x \in A \text{ et } (x \in B \text{ et } x \in C) \\
 &\iff (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ et } x \in C && \text{(associativité du « et »)} \\
 &\iff x \in (A \cap B) \text{ et } x \in C \iff x \in (A \cap B) \cap C.
 \end{aligned}$$

APPLICATION 7

Soient $A = \{x \in \mathbb{R} / |x - 1| < 3\}$ et $B = \{x \in \mathbb{Z} / x \leq 2\}$. Déterminer $A \cap B$ en extension.

SOLUTION 7

$|x - 1| < 3 \iff -3 < x - 1 < 3 \iff -2 < x < 4$, donc $A =]-2; 4[$.

Les éléments de $A \cap B$ sont les entiers relatifs x vérifiant $-2 < x < 4$ et $x \leq 2$, c'est-à-dire $-2 < x \leq 2$:

$$A \cap B = \{-1; 0; 1; 2\}.$$

1.6 Réunion

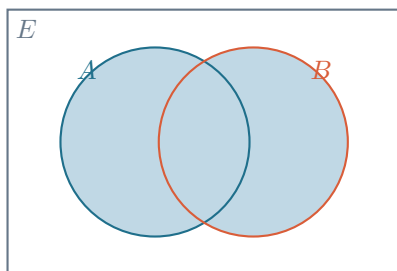
DÉFINITION 7

Soient A et B deux parties d'un ensemble E . La **réunion** de A et B , notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments de E qui sont dans A **ou** dans B :

$$A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}, \quad x \in A \cup B \iff (x \in A \vee x \in B).$$

REMARQUE 4

Le « ou » est ici **inclusif** : un élément qui est à la fois dans A et dans B appartient bien à $A \cup B$.



PROPRIÉTÉ 6

Soient A , B et C des parties d'un ensemble E .

- ▶ $A \cup B = B \cup A$;
- ▶ $A \cup A = A$ et $A \cup \bar{A} = E$;
- ▶ $A \cup E = E$ et $A \cup \emptyset = A$;
- ▶ $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$;
- ▶ $A \subset B \iff A \cup B = B$;
- ▶ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (*associativité*).

APPLICATION 8

Soient $A = \{x \in \mathbb{N} / x^2 < 19\}$ et $B = \{x \in \mathbb{Z} / |x + 3| \leq 5\}$. Déterminer $A \cup B$ en extension, puis en compréhension.

SOLUTION 8

- $x^2 < 19$ avec $x \in \mathbb{N}$: comme $4^2 = 16 < 19$ et $5^2 = 25 > 19$, on a $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$.
- $|x + 3| \leq 5 \iff -5 \leq x + 3 \leq 5 \iff -8 \leq x \leq 2$, donc $B = \{-8; -7; \dots; 1; 2\}$.
- En extension :

$$A \cup B = \{-8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}.$$

- En compréhension : ce sont exactement les entiers relatifs compris entre -8 et 4 , donc

$$A \cup B = \{x \in \mathbb{Z} / -8 \leq x \leq 4\}.$$

1.7 Règles de calcul**PROPRIÉTÉ 7 — Lois de De Morgan et distributivité**

Soient A , B et C des parties d'un ensemble E .

- ▶ **Lois de De Morgan :**

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \qquad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

- ▶ **Distributivité :**

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Démonstration de la première loi de De Morgan :

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cap B} &\iff x \notin (A \cap B) \iff \overline{(x \in A \text{ et } x \in B)} \\ &\iff \overline{(x \in A) \text{ ou } (x \in B)} && \text{(De Morgan, chapitre 01)} \\ &\iff x \notin A \text{ ou } x \notin B \iff x \in \bar{A} \text{ ou } x \in \bar{B} \iff x \in \bar{A} \cup \bar{B}. \end{aligned}$$

Démonstration de la première distributivité :

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\iff x \in A \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C) \\ &\iff (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } x \in C) \\ &&& \text{(distributivité du « et » sur le « ou »)} \\ &\iff x \in (A \cap B) \text{ ou } x \in (A \cap C) \iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

REMARQUE 5

Les deux autres égalités se démontrent exactement de la même façon. **Tout le travail consiste à appliquer, ligne à ligne, les lois logiques du chapitre 01** — il n'y a rien de nouveau à apprendre.

APPLICATION 9 — Un exercice de synthèse

Soient A , B et C trois parties d'un ensemble E . Montrer que

$$\begin{cases} A \cap B = A \cap C \\ A \cup B = A \cup C \end{cases} \implies B = C.$$

SOLUTION 9

On suppose $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$, et l'on montre la double inclusion.

Étape 1 : $B \subset C$. Soit $x \in B$. Alors $x \in A \cup B$, donc $x \in A \cup C$, c'est-à-dire $x \in A$ ou $x \in C$. On distingue :

- si $x \in C$, c'est ce que l'on veut ;
- si $x \notin C$, alors nécessairement $x \in A$; comme $x \in B$, on a $x \in A \cap B = A \cap C$, donc $x \in C$.

Dans tous les cas $x \in C$, donc $B \subset C$. (1)

Étape 2 : $C \subset B$. Le raisonnement est identique en échangeant les rôles de B et C : soit $x \in C$; alors $x \in A \cup C = A \cup B$. Si $x \in B$, c'est fini ; sinon $x \in A$, donc $x \in A \cap C = A \cap B$ et $x \in B$. D'où $C \subset B$. (2)

Conclusion : De (1) et (2) on déduit $B = C$.

APPLICATION 10

Soient A , B et C trois parties d'un ensemble E . Montrer que

$$A = B \iff A \cap B = A \cup B.$$

SOLUTION 10

$\implies$ Si $A = B$, alors $A \cap B = A \cap A = A$ et $A \cup B = A \cup A = A$: les deux membres valent A .

$\Leftarrow$ On suppose $A \cap B = A \cup B$.

- Soit $x \in A$. Alors $x \in A \cup B$, donc $x \in A \cap B$, c'est-à-dire $x \in B$. D'où $A \subset B$. (1)
- Soit $x \in B$. Alors $x \in A \cup B$, donc $x \in A \cap B$, c'est-à-dire $x \in A$. D'où $B \subset A$. (2)

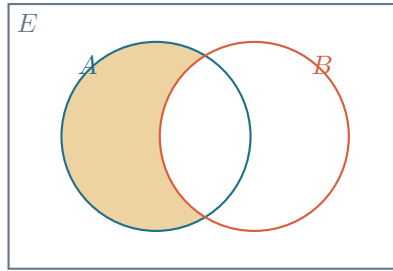
Conclusion : De (1) et (2) : $A = B$.

1.8 Différence de deux ensembles

DÉFINITION 8

Soient A et B deux parties d'un ensemble E . La **différence** de A et B dans cet ordre, notée $A \setminus B$ et lue « A moins B », est l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B :

$$A \setminus B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\}, \quad x \in A \setminus B \iff (x \in A \wedge x \notin B).$$



PROPRIÉTÉ 8

Soient A et B deux parties d'un ensemble E .

- ▶ $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ (c'est l'égalité la plus utile du paragraphe);
- ▶ $E \setminus A = \overline{A}$ et $A \setminus \emptyset = A$;
- ▶ $A \subset B \iff A \setminus B = \emptyset$;
- ▶ $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$.

REMARQUE 6

La différence n'est **pas** commutative : en général $A \setminus B \neq B \setminus A$. Par exemple pour $A = \{2; 5; 7\}$ et $B = \{1; 5; 7; 9\}$:

$$A \setminus B = \{2\} \quad \text{et} \quad B \setminus A = \{1; 9\}.$$

APPLICATION 11

Soient A , B et C trois parties d'un ensemble E . Montrer que

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

SOLUTION 11

On utilise $X \setminus Y = X \cap \overline{Y}$ et les lois de De Morgan — c'est beaucoup plus rapide qu'un retour aux éléments :

$$\begin{aligned} A \setminus (B \cap C) &= A \cap \overline{B \cap C} \\ &= A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) && \text{(loi de De Morgan)} \\ &= (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) && \text{(distributivité)} \\ &= (A \setminus B) \cup (A \setminus C). \end{aligned}$$

APPLICATION 12

Soient A , B et C trois parties d'un ensemble E . Montrer que

$$\begin{cases} A \cap C \subset B \cap C \\ A \setminus C = B \setminus C \end{cases} \implies A \subset B.$$

SOLUTION 12

On suppose les deux hypothèses et l'on montre $A \subset B$. Soit $x \in A$. On distingue selon que x appartient ou non à C .

- ▶ Si $x \in C$: alors $x \in A \cap C$, donc $x \in B \cap C$ par la première hypothèse, c'est-à-dire $x \in B$.

► Si $x \notin C$: alors $x \in A \setminus C$, donc $x \in B \setminus C$ par la seconde hypothèse, c'est-à-dire $x \in B$.

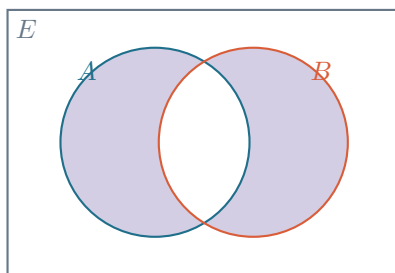
Conclusion : Dans tous les cas $x \in B$, donc $A \subset B$.

1.9 Différence symétrique

DÉFINITION 9

Soient A et B deux parties d'un ensemble E . La **différence symétrique** de A et B , notée $A \Delta B$, est la partie de E définie par

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$



PROPRIÉTÉ 9

Soient A , B et C des parties d'un ensemble E .

- $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;
- $A \Delta B = B \Delta A$ (*commutativité*);
- $A \Delta \emptyset = A$ et $A \Delta A = \emptyset$;
- $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$.

Démonstration du premier point :

$$\begin{aligned}
 (A \cup B) \setminus (A \cap B) &= (A \cup B) \cap \overline{A \cap B} = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \\
 &= [(A \cup B) \cap \overline{A}] \cup [(A \cup B) \cap \overline{B}] && \text{(distributivité)} \\
 &= [(A \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{A})] \cup [(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{B})] \\
 &= (B \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) && \text{(car } A \cap \overline{A} = B \cap \overline{B} = \emptyset) \\
 &= (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = A \Delta B.
 \end{aligned}$$

REMARQUE 7

Le deuxième point est alors immédiat :

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = B \Delta A,$$

puisque la réunion est commutative. De même $A \Delta \emptyset = (A \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus A) = A \cup \emptyset = A$.

APPLICATION 13

Soient A et B deux parties d'un ensemble E . Montrer que $\overline{A \Delta B} = A \Delta B$.

SOLUTION 13

On part de la caractérisation $X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ et de $X \setminus Y = X \cap \bar{Y}$:

$$\begin{aligned}\bar{A} \Delta \bar{B} &= (\bar{A} \setminus \bar{B}) \cup (\bar{B} \setminus \bar{A}) = (\bar{A} \cap \bar{\bar{B}}) \cup (\bar{B} \cap \bar{\bar{A}}) \\ &= (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{B} \cap A) && (\text{car } \bar{\bar{X}} = X) \\ &= (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = A \Delta B.\end{aligned}$$

1.10 Produit cartésien**DÉFINITION 10**

Soient E et F deux ensembles. Le **produit cartésien** de E et F , noté $E \times F$, est l'ensemble des **couples** $(x; y)$ où $x \in E$ et $y \in F$:

$$E \times F = \{(x; y) / x \in E \text{ et } y \in F\}, \quad (x; y) \in E \times F \iff (x \in E \wedge y \in F).$$

△ **Un couple n'est pas une paire.** Dans un couple, l'ordre compte : $(1; 2) \neq (2; 1)$, alors que $\{1; 2\} = \{2; 1\}$. De plus

$$(x; y) = (x'; y') \iff (x = x' \text{ et } y = y').$$

EXEMPLE 2

- $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x; y) / x, y \in \mathbb{R}\}$: c'est l'ensemble des points du plan muni d'un repère.
- Soient $E = \{a; b; c\}$ et $F = \{1; 2\}$. Alors $E \times F$ possède $3 \times 2 = 6$ éléments :

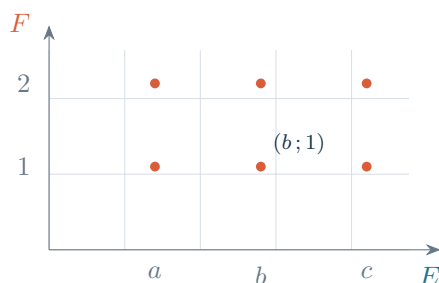
$$E \times F = \{(a; 1); (a; 2); (b; 1); (b; 2); (c; 1); (c; 2)\},$$

tandis que $F^2 = F \times F$ en possède $2 \times 2 = 4$:

$$F^2 = \{(1; 1); (1; 2); (2; 1); (2; 2)\}.$$

REMARQUE 8 — Diagramme cartésien

On représente $E \times F$ par un **diagramme cartésien** : les éléments de E en abscisse, ceux de F en ordonnée, et un point pour chaque couple.

**PROPRIÉTÉ 10**

Soient E et F deux ensembles **finis**, de cardinaux n et p . Alors $E \times F$ possède $n \times p$ éléments.

APPLICATION 14 — Exercice de révision de la partie I

On considère les ensembles

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N} / n^2 - 8n + 12 \leq 0 \right\}, \quad B = \left\{ n \in \mathbb{N} / \frac{12}{n+2} \in \mathbb{N} \right\}, \quad C = \{ x \in \mathbb{R} / |x - 4| \leq 2 \}.$$

- 1) Déterminer en extension A et B .
- 2) Déterminer en extension $A \cup B$ et $A \cap B$.
- 3) Montrer que $A \subset C$.
- 4) Construire, dans un repère orthonormé, le diagramme cartésien de $B \times A$.

SOLUTION 14

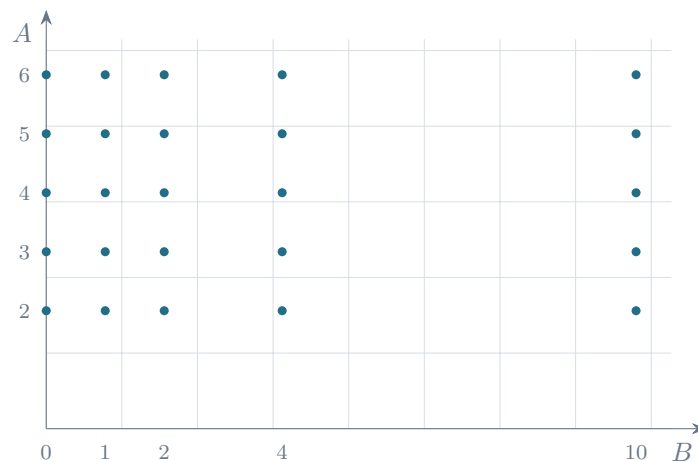
- 1) • $n^2 - 8n + 12 \leq 0 : \Delta = 64 - 48 = 16$, racines 2 et 6. Le trinôme est négatif entre les racines, donc $2 \leq n \leq 6$ et

$$A = \{2; 3; 4; 5; 6\}.$$

- $\frac{12}{n+2} \in \mathbb{N}$ signifie que $n+2$ divise 12. Comme $n \in \mathbb{N}$, on a $n+2 \geq 2$, donc $n+2 \in \{2; 3; 4; 6; 12\}$ et

$$B = \{0; 1; 2; 4; 10\}.$$

- 2) $A \cup B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 10\}$ et $A \cap B = \{2; 4\}$.
- 3) $|x - 4| \leq 2 \iff -2 \leq x - 4 \leq 2 \iff 2 \leq x \leq 6$, donc $C = [2; 6]$. Or tout élément de A est un entier compris entre 2 et 6 : $A \subset C$.
- 4) $B \times A$ possède $5 \times 5 = 25$ couples.



Partie II — Les applications

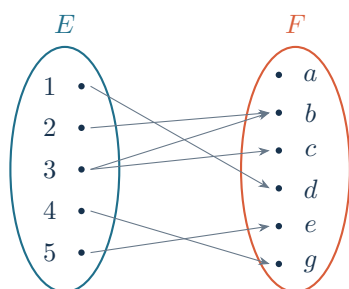
Image directe et réciproque ■ Injection, surjection, bijection ■ Composition

08 heures

1.11 Définition d'une application

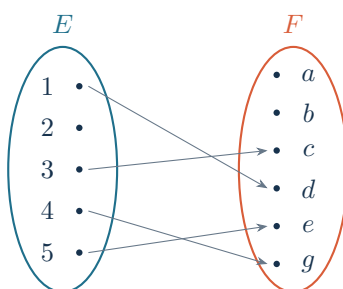
ACTIVITÉ 1

On pose $E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ et $F = \{a; b; c; d; e; g\}$. Dans chacun des trois schémas ci-dessous, f désigne une relation qui associe aux éléments de E des éléments de F . Dans quel cas peut-on parler d'application ?



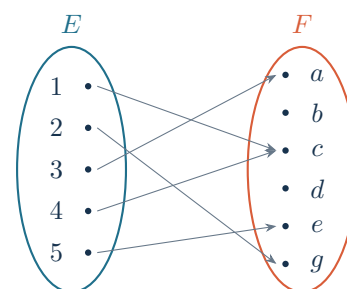
Cas 1

3 a **deux** images :
ce n'est pas
une application



Cas 2

2 n'a **aucune** image :
ce n'est pas
une application



Cas 3

chaque élément de E
a **une seule** image :
c'est une application

DÉFINITION 11

Soient E et F deux ensembles non vides.

On appelle **application** de E vers F toute relation f qui, à tout élément x de E , associe un **unique** élément y de F . On écrit $y = f(x)$:

$$f \text{ est une application de } E \text{ vers } F \iff (\forall x \in E)(\exists ! y \in F), y = f(x).$$

- E est l'**ensemble de départ**, F l'**ensemble d'arrivée** ;
- pour $x \in E$, l'unique $y \in F$ tel que $y = f(x)$ est l'**image** de x par f ;
- pour $y \in F$, les éléments $x \in E$ tels que $y = f(x)$ — s'il en existe — sont les **antécédents** de y par f .

REMARQUE 9 — Application ou fonction ?

Une **fonction** numérique peut n'être définie que sur une partie de son ensemble de départ : $x \mapsto \frac{1}{x}$ est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, mais pas une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, car 0 n'a pas d'image.

En revanche, $x \mapsto \frac{1}{x}$ est une application de $\mathbb{R}^*$ vers $\mathbb{R}$. **Préciser l'ensemble de départ, c'est ce qui transforme une fonction en application.**

1.12 Image directe d'une partie

DÉFINITION 12

Soient f une application de E vers F , et A une partie de E . L'**image directe** de A par f , notée $f(A)$, est l'ensemble des images des éléments de A :

$$f(A) = \{f(x) / x \in A\}.$$

PROPRIÉTÉ 11

Avec les notations précédentes, et C une partie de F :

- ▶ $y \in f(A) \iff [(\exists x \in A), y = f(x)]$;
- ▶ $x \in A \implies f(x) \in f(A)$ $\triangle$ **la réciproque est fausse !** ;
- ▶ $f(A) \subset F$ et $f(E) \subset F$;
- ▶ $f(A) \subset C \iff [(\forall x \in A), f(x) \in C]$;
- ▶ $C \subset f(A) \iff [(\forall y \in C)(\exists x \in A), f(x) = y]$.

$\triangle$ **Le piège classique.** $f(x) \in f(A)$ n'entraîne pas $x \in A$. Par exemple, pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ et $A = [0; 1]$, on a $f(-1) = 1 \in f(A)$ bien que $-1 \notin A$.

PROPRIÉTÉ 12 — Image directe et opérations

Soient f une application de E vers F , et A, B deux parties de E .

- ▶ $A = \emptyset \iff f(A) = \emptyset$;
- ▶ $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$;
- ▶ $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
- ▶ $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ $\triangle$ **inclusion seulement.**

REMARQUE 10 — Pourquoi seulement une inclusion ?

Prenons $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, avec $A = \{-1\}$ et $B = \{1\}$. Alors $A \cap B = \emptyset$ donc $f(A \cap B) = \emptyset$, tandis que

$$f(A) \cap f(B) = \{1\} \cap \{1\} = \{1\} \neq \emptyset.$$

L'égalité est donc bien fautive en général. On verra plus loin qu'elle devient vraie lorsque f est **injective**.

APPLICATION 15

- 1) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. Montrer que $f(\{-2; 0; 1; 2\}) = \{0; 1; 4\}$.
- 2) Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (\sqrt{x} - 2)^2 - 3$. Déterminer $f([0; 4])$.
- 3) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 3 - 2x$. Déterminer $f([-1; 0] \cup [1; 2])$.

SOLUTION 15

1) On calcule les images une à une :

$$f(-2) = 4, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f(2) = 4.$$

L'ensemble des valeurs obtenues est $\{0; 1; 4\}$ — on n'écrit 4 qu'une fois.

2) Soit $x \in [0; 4]$. On procède **par encadrements successifs** :

$$0 \leq x \leq 4 \implies 0 \leq \sqrt{x} \leq 2 \implies -2 \leq \sqrt{x} - 2 \leq 0.$$

En élevant au carré (attention : la fonction carré est *décroissante* sur les négatifs) :

$$0 \leq (\sqrt{x} - 2)^2 \leq 4 \implies -3 \leq (\sqrt{x} - 2)^2 - 3 \leq 1.$$

Donc $f([0; 4]) \subset [-3; 1]$. Réciproquement, les bornes sont atteintes : $f(4) = -3$ et $f(0) = 1$, et f est continue, donc

$$f([0; 4]) = [-3; 1].$$

3) f est affine *décroissante* (coefficient $-2 < 0$), donc elle renverse les inégalités :

$$f([-1; 0]) = [f(0); f(-1)] = [3; 5], \quad f([1; 2]) = [f(2); f(1)] = [-1; 1].$$

Comme $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$:

$$f([-1; 0] \cup [1; 2]) = [-1; 1] \cup [3; 5].$$

1.13 Image réciproque d'une partie

DÉFINITION 13

Soient f une application de E vers F , et C une partie de F . L'**image réciproque** de C par f , notée $f^{-1}(C)$, est l'ensemble des antécédents des éléments de C :

$$f^{-1}(C) = \{x \in E \mid f(x) \in C\}.$$

△ Une notation trompeuse. L'écriture $f^{-1}(C)$ ne suppose **pas** que f soit bijective : c'est une simple notation pour l'ensemble des antécédents. On la définit pour toute application. La *bijection réciproque* f^{-1} , elle, ne sera définie qu'au paragraphe 9.

PROPRIÉTÉ 13

Avec les notations précédentes, et A une partie de E :

- ▶ $x \in f^{-1}(C) \iff f(x) \in C$;
- ▶ $f^{-1}(C) \subset E$ et $f^{-1}(F) = E$;
- ▶ $C = \emptyset \implies f^{-1}(C) = \emptyset$ (mais $f^{-1}(C)$ peut être vide sans que C le soit).

PROPRIÉTÉ 14 — Image réciproque et opérations

Soient f une application de E vers F , et C, D deux parties de F .

- ▶ $C \subset D \implies f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$;
- ▶ $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$;
- ▶ $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$ **égalité, cette fois.**

REMARQUE 11 — À retenir absolument

	Réunion	Intersection
Image directe $f(\cdot)$	$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$	$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
Image réciproque $f^{-1}(\cdot)$	$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$	$f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

L'image réciproque se comporte bien avec toutes les opérations ; l'image directe, seulement avec la réunion. C'est une question classique de contrôle.

Démonstration de $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(C \cap D) &\iff f(x) \in C \cap D \iff (f(x) \in C \text{ et } f(x) \in D) \\ &\iff (x \in f^{-1}(C) \text{ et } x \in f^{-1}(D)) \iff x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D). \end{aligned}$$

APPLICATION 16

- 1) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Déterminer $f^{-1}(\{1; 4; 25; 3; -2\})$.
- 2) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + 2x$. Déterminer $f^{-1}([-1; 0])$, puis $f^{-1}([3; +\infty[)$, puis leur intersection.

SOLUTION 16

- 1) On résout $x^2 = c$ pour chaque élément c :

$$x^2 = 1 \implies x = \pm 1, \quad x^2 = 4 \implies x = \pm 2, \quad x^2 = 25 \implies x = \pm 5, \quad x^2 = 3 \implies x = \pm\sqrt{3},$$

et $x^2 = -2$ n'a aucune solution réelle. Donc

$$f^{-1}(\{1; 4; 25; 3; -2\}) = \{-5; -2; -\sqrt{3}; \sqrt{3}; 2; 5\}.$$

△ **Remarquer** que $-2 \in C$ ne fournit aucun antécédent : $f^{-1}(C)$ peut « perdre » des éléments de C .

- 2) On écrit f sous forme canonique : $x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$.

- $f^{-1}([-1; 0])$:

$$-1 \leq (x+1)^2 - 1 \leq 0 \iff 0 \leq (x+1)^2 \leq 1 \iff -1 \leq x+1 \leq 1 \iff -2 \leq x \leq 0,$$

donc $f^{-1}([-1; 0]) = [-2; 0]$.

- $f^{-1}([3; +\infty[)$:

$$x^2 + 2x \geq 3 \iff x^2 + 2x - 3 \geq 0 \iff (x+3)(x-1) \geq 0,$$

soit $x \leq -3$ ou $x \geq 1$: $f^{-1}([3; +\infty[) =]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[$.

- Enfin

$$[-2; 0] \cap (]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[) = \emptyset.$$

1.14 Égalité de deux applications**DÉFINITION 14**

Soient f une application de E vers F et g une application de E' vers F' . Les applications f et g sont

égales, et l'on écrit $f = g$, lorsque :

$$f = g \iff \begin{cases} E = E' & \text{(même ensemble de départ)} \\ F = F' & \text{(même ensemble d'arrivée)} \\ (\forall x \in E), f(x) = g(x) & \text{(mêmes images)} \end{cases}$$

REMARQUE 12

Les trois conditions comptent. Les applications

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto x^2$$

ont la même formule mais *ne sont pas égales* : leurs ensembles d'arrivée diffèrent. Cette distinction sera décisive pour la surjectivité.

APPLICATION 17

Montrer que les applications suivantes sont égales :

$$f : \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1 - (\cos x - \sin x)^2 \quad \text{et} \quad g : \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}.$$

SOLUTION 17

Les ensembles de départ et d'arrivée sont les mêmes. Il reste à montrer que les images coïncident. Soit $x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ (sur cet intervalle $\cos x \neq 0$, donc $\tan x$ existe).

• **Pour f :**

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - (\cos^2 x - 2 \cos x \sin x + \sin^2 x) = 1 - (1 - 2 \sin x \cos x) \\ &= 2 \sin x \cos x = \sin(2x). \end{aligned}$$

• **Pour g :** on utilise $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$:

$$g(x) = \frac{2 \times \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 2 \times \frac{\sin x}{\cos x} \times \cos^2 x = 2 \sin x \cos x = \sin(2x).$$

Conclusion : Pour tout x de l'intervalle, $f(x) = g(x) = \sin(2x)$: les trois conditions sont vérifiées, donc $f = g$.

1.15 Restriction et prolongement

DÉFINITION 15 — Restriction

Soient $f : E \rightarrow F$ une application et A une partie de E . On appelle **restriction** de f à A l'application

$$g : A \rightarrow F, \quad x \mapsto f(x).$$

Autrement dit :

$$g \text{ est la restriction de } f \text{ à } A \iff \begin{cases} A \subset E \\ (\forall x \in A), g(x) = f(x) \end{cases}$$

DÉFINITION 16 — Prolongement

Soient $f : E \rightarrow F$ une application et G un ensemble tel que $E \subset G$. On appelle **prolongement** de f à G toute application

$$h : G \rightarrow F \quad \text{telle que} \quad (\forall x \in E), h(x) = f(x).$$

REMARQUE 13

La restriction est **unique** : on rétrécit l'ensemble de départ, les images ne changent pas. Le prolongement, lui, n'est **pas unique** : on élargit l'ensemble de départ, et l'on est libre de choisir les images des nouveaux éléments. C'est pourquoi l'on dit « *la* restriction » mais « *un* prolongement ».

APPLICATION 18

- 1) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x - |x| + 3$. Déterminer l'application g , restriction de f à $]-\infty; 0]$.
- 2) Soit $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2}{x} + 5$. Déterminer un prolongement de f à $\mathbb{R}$.

SOLUTION 18

- 1) Pour $x \leq 0$, on a $|x| = -x$, donc

$$f(x) = 2x - (-x) + 3 = 3x + 3.$$

La restriction cherchée est

$$g :]-\infty; 0] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 3x + 3.$$

- 2) Pour $x \neq 0$, $\frac{x^2}{x} = x$, donc $f(x) = x + 5$. L'application

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x + 5$$

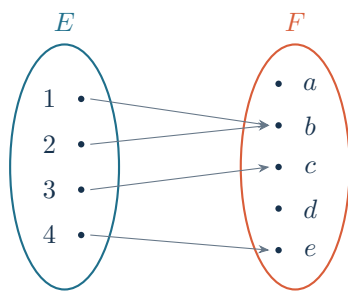
est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier et coïncide avec f sur $\mathbb{R}^*$: c'est un prolongement de f à $\mathbb{R}$.

△ **Ce n'est pas le seul.** L'application $h_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h_1(x) = x + 5$ si $x \neq 0$ et $h_1(0) = 100$ en est un autre. Le prolongement h est seulement le plus naturel — c'est le *prolongement par continuité*, que l'on retrouvera au chapitre 08.

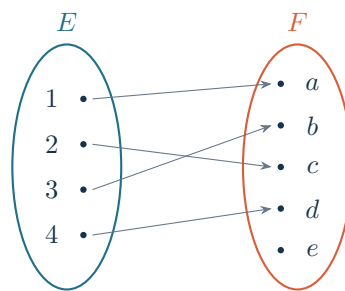
1.16 Application injective

ACTIVITÉ 2

Reprenons des schémas sagittaux. Dans quel cas chaque élément de F a-t-il **au plus un** antécédent dans E ?



b a **deux** antécédents :
 f n'est pas injective



chaque élément de F a
au plus un antécédent :
 f est injective

DÉFINITION 17

Soit f une application de E vers F . On dit que f est **injective** si tout élément de F a **au plus un** antécédent dans E par f :

$$f \text{ injective} \iff [(\forall (x; y) \in E^2), f(x) = f(y) \implies x = y].$$

PROPRIÉTÉ 15 — Négation

$$f \text{ n'est pas injective} \iff [(\exists (x; y) \in E^2), f(x) = f(y) \text{ et } x \neq y].$$

REMARQUE 14 — Les deux rédactions

- **Pour montrer que f est injective** : on part de $f(x) = f(y)$ et l'on aboutit à $x = y$. C'est une implication, donc un raisonnement direct.
- **Pour montrer que f n'est pas injective** : il suffit d'exhiber *deux* éléments distincts ayant la même image — un contre-exemple.

APPLICATION 19

- 1) Montrer que $f : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 2x + 3$ est injective.
- 2) Soit $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1 + \frac{1}{x^2}$.
 - a) Déterminer $f^{-1}(\{2\})$.
 - b) En déduire que f n'est pas injective.
 - c) Soit g la restriction de f à $] -\infty; 0[$. Montrer que g est injective.

SOLUTION 19

- 1) On écrit la forme canonique : $f(x) = (x - 1)^2 + 2$. Soient $x, y \in [1; +\infty[$ tels que $f(x) = f(y)$:

$$(x - 1)^2 + 2 = (y - 1)^2 + 2 \implies (x - 1)^2 = (y - 1)^2 \implies |x - 1| = |y - 1|.$$

Or $x \geq 1$ et $y \geq 1$, donc $x - 1 \geq 0$ et $y - 1 \geq 0$: les valeurs absolues se retirent sans changement de signe.

$$x - 1 = y - 1 \implies x = y.$$

Donc f est **injective**.

△ **L'hypothèse $x \geq 1$ est essentielle**. Sur $\mathbb{R}$ tout entier, $f(0) = f(2) = 3$: l'application ne serait pas injective.

2) a) $f^{-1}(\{2\}) = \left\{x \in \mathbb{R}^* / 1 + \frac{1}{x^2} = 2\right\}$. Or

$$1 + \frac{1}{x^2} = 2 \iff \frac{1}{x^2} = 1 \iff x^2 = 1 \iff x = 1 \text{ ou } x = -1.$$

Donc $f^{-1}(\{2\}) = \{-1; 1\}$.

b) L'élément 2 possède *deux* antécédents distincts, -1 et 1 : f n'est **pas injective**.

c) Soient $x, y \in]-\infty; 0[$ tels que $g(x) = g(y)$:

$$1 + \frac{1}{x^2} = 1 + \frac{1}{y^2} \implies x^2 = y^2 \implies |x| = |y|.$$

Or $x < 0$ et $y < 0$, donc $|x| = -x$ et $|y| = -y$, d'où $-x = -y$ et $x = y$. Donc g est **injective**.

1.17 Application surjective

DÉFINITION 18

Soit f une application de E vers F . On dit que f est **surjective** si tout élément de F a **au moins un** antécédent dans E par f :

$$f \text{ surjective} \iff [(\forall y \in F)(\exists x \in E), y = f(x)] \iff f(E) = F.$$

PROPRIÉTÉ 16 — Négation

$$f \text{ n'est pas surjective} \iff [(\exists y \in F)(\forall x \in E), y \neq f(x)] \iff f(E) \neq F.$$

REMARQUE 15 — La rédaction type

Pour montrer que f est surjective, on se donne $y \in F$ **quelconque** et l'on **résout l'équation** $f(x) = y$ **d'inconnue** x , en vérifiant que la solution trouvée appartient bien à E .

La surjectivité dépend de l'**ensemble d'arrivée** : la même formule peut être surjective ou non selon le F choisi. C'est pourquoi on écrit toujours $f : E \rightarrow F$ en entier.

APPLICATION 20

1) Montrer que $f :]-\infty; 4[\rightarrow]-\infty; 1[$, $x \mapsto \frac{x+1}{x-4}$ est surjective.

2) Soit g la restriction de $x \mapsto 1 + \frac{1}{x^2}$ à $] -\infty; 0[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

a) Résoudre dans $] -\infty; 0[$ l'équation $g(x) = 0$.

b) En déduire que g n'est pas surjective.

3) Montrer que $h :]-\infty; 0[\rightarrow]1; +\infty[$, $x \mapsto 1 + \frac{1}{x^2}$ est surjective.

SOLUTION 20

1) Soit $y \in]-\infty; 1[$, donc $y < 1$. Résolvons $f(x) = y$ d'inconnue $x \in]-\infty; 4[$:

$$\frac{x+1}{x-4} = y \iff x+1 = y(x-4) \quad (\text{licite car } x \neq 4)$$

$$\iff x+1 = yx-4y \iff x-yx = -4y-1$$

$$\iff x(1-y) = -(4y+1) \iff x = \frac{4y+1}{y-1} \quad (\text{licite car } y \neq 1).$$

Il reste à vérifier que ce x appartient bien à $]-\infty; 4[$:

$$\frac{4y+1}{y-1} < 4 \iff 4y+1 > 4(y-1) \iff 4y+1 > 4y-4 \iff 1 > -4,$$

(l'inégalité change de sens car $y-1 < 0$), ce qui est toujours vrai.

Conclusion : Tout y de $]-\infty; 1[$ admet un antécédent : f est **surjective**.

2) a) $1 + \frac{1}{x^2} = 0 \iff \frac{1}{x^2} = -1$, ce qui est impossible car $\frac{1}{x^2} > 0$. L'équation n'a aucune solution.

b) L'élément 0 de l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$ n'a aucun antécédent : g n'est **pas surjective**.

3) Soit $y \in]1; +\infty[$, donc $y > 1$ et $y-1 > 0$. Résolvons $h(x) = y$ d'inconnue $x < 0$:

$$1 + \frac{1}{x^2} = y \iff \frac{1}{x^2} = y-1 \iff x^2 = \frac{1}{y-1} \iff x = \frac{1}{\sqrt{y-1}} \text{ ou } x = \frac{-1}{\sqrt{y-1}}.$$

Comme on cherche $x < 0$, on retient $x = \frac{-1}{\sqrt{y-1}}$, qui est bien strictement négatif.

Conclusion : h est **surjective**.

Remarque : comparer 2) et 3) : c'est la même formule. Seul l'ensemble d'arrivée a changé, et cela suffit à rendre l'application surjective.

1.18 Application bijective

DÉFINITION 19

Soit f une application de E vers F . On dit que f est **bijective** si tout élément de F a **exactement un** antécédent dans E :

$$f \text{ bijective} \iff [(\forall y \in F)(\exists! x \in E), y = f(x)] \iff (f \text{ injective et } f \text{ surjective}).$$

PROPRIÉTÉ 17 — Négation

f n'est pas bijective $\iff f$ n'est pas injective **ou** f n'est pas surjective.

REMARQUE 16 — La méthode la plus rapide

En pratique, pour montrer qu'une application est bijective, on ne démontre pas toujours séparément l'injectivité et la surjectivité. Il est souvent plus rapide de montrer directement que, **pour tout** $y \in F$, **l'équation** $f(x) = y$ **admet une unique solution dans** E : l'existence donne la surjectivité, l'unicité donne l'injectivité.

APPLICATION 21

Montrer que l'application

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \left[-\frac{1}{3}; 1\right], \quad x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3}$$

est bijective.

SOLUTION 21

Soit $y \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right]$. Résolvons $f(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$. Remarquons d'abord que $x^2 + 3 > 0$: le quotient est toujours défini.

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3} = y &\iff x^2 - 1 = y(x^2 + 3) \iff x^2 - 1 = yx^2 + 3y \\ &\iff x^2(1 - y) = 3y + 1 \iff x^2 = \frac{3y + 1}{1 - y} \quad (\text{licite car } y \neq 1). \end{aligned}$$

Étape 1 : Le second membre est positif. Comme $-\frac{1}{3} \leq y < 1$, on a $3y + 1 \geq 0$ et $1 - y > 0$, donc $\frac{3y + 1}{1 - y} \geq 0$: l'équation $x^2 = \frac{3y + 1}{1 - y}$ a bien un sens.

Étape 2 : Unicité de la solution positive. Dans $\mathbb{R}^+$,

$$x^2 = \frac{3y + 1}{1 - y} \iff x = \sqrt{\frac{3y + 1}{1 - y}},$$

car la racine carrée est l'unique solution positive. Il existe donc **un et un seul** $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(x) = y$.

Conclusion : f est **bijective**.

Contrôle. $f(0) = \frac{-1}{3}$: la borne gauche est atteinte. Et $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 3} \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow +\infty$ sans jamais valoir 1 : la borne droite est exclue. L'ensemble d'arrivée est donc bien choisi.

1.19 Application réciproque d'une bijection

DÉFINITION 20

Soit $f : E \rightarrow F$ une application **bijective**. En associant à tout élément y de F son unique antécédent par f , on définit une application de F vers E , appelée **bijection réciproque** de f — ou simplement **réciproque** de f — et notée f^{-1} .

Elle est caractérisée par l'équivalence

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x \in E \end{cases} \iff \begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y \in F \end{cases}$$

REMARQUE 17 — Comment la déterminer en pratique

Pour trouver l'expression de f^{-1} , on **résout l'équation** $f(x) = y$ **d'inconnue** x : la solution obtenue, exprimée en fonction de y , est $f^{-1}(y)$. C'est exactement le calcul déjà fait pour montrer la surjectivité — on ne refait donc pas le travail deux fois.

PROPRIÉTÉ 18

Si $f : E \rightarrow F$ est bijective, alors $f^{-1} : F \rightarrow E$ est bijective et

$$(\forall x \in E), f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{et} \quad (\forall y \in F), f(f^{-1}(y)) = y.$$

Autrement dit $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$.

APPLICATION 22

Déterminer la bijection réciproque de l'application f du paragraphe précédent.

SOLUTION 22

Le calcul a déjà été fait : pour $y \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right[$, l'unique antécédent est $x = \sqrt{\frac{3y+1}{1-y}}$. Donc

$$f^{-1} : \left[-\frac{1}{3}; 1\right[\rightarrow \mathbb{R}^+, \quad y \mapsto \sqrt{\frac{3y+1}{1-y}}.$$

Vérification. Pour $x \in \mathbb{R}^+$, posons $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3}$. Alors

$$\frac{3y+1}{1-y} = \frac{\frac{3x^2 - 3 + x^2 + 3}{x^2 + 3}}{\frac{x^2 + 3 - x^2 + 1}{x^2 + 3}} = \frac{4x^2}{4} = x^2,$$

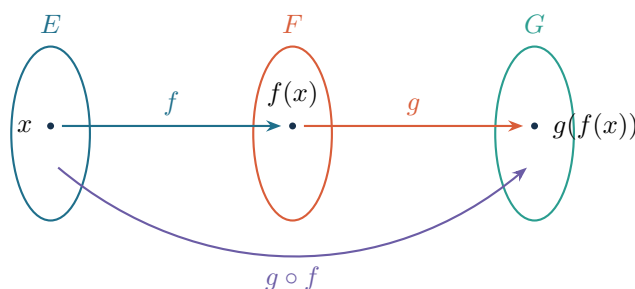
donc $f^{-1}(f(x)) = \sqrt{x^2} = |x| = x$ puisque $x \geq 0$. ✓

1.20 Composition des applications

DÉFINITION 21

Soient f une application de E vers F et g une application de F vers G . L'application h de E vers G définie par $h(x) = g(f(x))$ est appelée la **composée** de f et g dans cet ordre. On la note $g \circ f$:

$$g \circ f : E \rightarrow G, \quad (\forall x \in E), (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$



△ L'ordre de lecture. Dans $g \circ f$, c'est f qui agit **en premier**. On lit « g rond f » mais on calcule f d'abord. Pour que $g \circ f$ ait un sens, il faut que l'ensemble d'arrivée de f soit l'ensemble de départ de g .

PROPRIÉTÉ 19

- La composition n'est **pas commutative** : en général $g \circ f \neq f \circ g$ (les deux n'ont même pas toujours un sens).
- La composition est **associative** : $(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$.
- On note $\text{Id}_E : E \rightarrow E, x \mapsto x$ l'application **identité** de E . Pour toute application $f : E \rightarrow F$:

$$f \circ \text{Id}_E = f \quad \text{et} \quad \text{Id}_F \circ f = f.$$

PROPRIÉTÉ 20 — Composition et injectivité, surjectivité, bijectivité

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

- Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
- Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
- Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective, et

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

REMARQUE 18

Noter l'**inversion de l'ordre** dans la dernière formule : la réciproque de « f puis g » est « g^{-1} puis f^{-1} ». C'est l'image de la chaussette et de la chaussure : on enfle la chaussette puis la chaussure, on retire la chaussure puis la chaussette.

Démonstration du premier point :

Supposons f et g injectives, et soient $x, y \in E$ tels que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$, c'est-à-dire $g(f(x)) = g(f(y))$. Comme g est injective, $f(x) = f(y)$; comme f est injective, $x = y$. Donc $g \circ f$ est injective.

APPLICATION 23

On considère les applications

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto x^2 + 2 \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 3 + \sqrt{x}.$$

Déterminer $g \circ f$, $f \circ g$ et $f \circ f$.

SOLUTION 23

- $g \circ f$. L'ensemble d'arrivée de f est $\mathbb{R}^+$, qui est l'ensemble de départ de g : la composée a un sens, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 2) = 3 + \sqrt{x^2 + 2}.$$

- $f \circ g$. L'ensemble d'arrivée de g est $\mathbb{R}$, qui est l'ensemble de départ de f : la composée a un sens, de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3 + \sqrt{x}) = (3 + \sqrt{x})^2 + 2.$$

- $f \circ f$. Attention : l'arrivée de f est $\mathbb{R}^+$ et son départ est $\mathbb{R}$; comme $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$, la composée a un sens, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^+$.

$$(f \circ f)(x) = f(x^2 + 2) = (x^2 + 2)^2 + 2.$$

Remarque : $g \circ f \neq f \circ g$, ce qui confirme que la composition n'est pas commutative : les deux applications n'ont d'ailleurs ni le même ensemble de départ ni le même ensemble d'arrivée.

Fiche résumé

Partie I — Les ensembles

Notion	À retenir
Écriture	En <i>extension</i> (liste) ou en <i>compréhension</i> (propriété).
Inclusion	$A \subset B \iff [(\forall x), x \in A \implies x \in B]$
Égalité	$A = B \iff (A \subset B \text{ et } B \subset A)$ — la double inclusion est la méthode reine.
Parties	$A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E$; si $\text{card}(E) = n$ alors $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.
Complémentaire	$\overline{A} = \{x \in E / x \notin A\}$; $\overline{\overline{A}} = A$; $A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A}$.
Intersection, réunion	$x \in A \cap B \iff (x \in A \wedge x \in B)$; $x \in A \cup B \iff (x \in A \vee x \in B)$.
De Morgan	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
Distributivité	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Différence	$A \setminus B = A \cap \overline{B}$; non commutative.
Différence symétrique	$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
Produit cartésien	$E \times F = \{(x; y) / x \in E, y \in F\}$; $(x; y) = (x'; y') \iff (x = x' \text{ et } y = y')$.

Partie II — Les applications

Notion	À retenir
Application	$(\forall x \in E)(\exists! y \in F), y = f(x)$.
Image directe	$f(A) = \{f(x) / x \in A\}$; $y \in f(A) \iff (\exists x \in A), y = f(x)$.
Image réciproque	$f^{-1}(C) = \{x \in E / f(x) \in C\}$; $x \in f^{-1}(C) \iff f(x) \in C$. Ne suppose pas f bijective.
Opérations	$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ mais seulement $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$; f^{-1} respecte $\cup$ et $\cap$.
Égalité	$f = g \iff$ mêmes départ, même arrivée, mêmes images.
Restriction / prolongement	La restriction est <i>unique</i> ; un prolongement ne l'est <i>pas</i> .
Injective	$f(x) = f(y) \implies x = y$ — tout élément de F a au plus un antécédent.
Surjective	$(\forall y \in F)(\exists x \in E), y = f(x)$, soit $f(E) = F$ — au moins un antécédent.
Bijective	injective et surjective — exactement un antécédent.
Réciproque	f^{-1} s'obtient en résolvant $f(x) = y$ d'inconnue x ; $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$.
Composition	$(g \circ f)(x) = g(f(x))$; associative, non commutative; $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

RAPPEL — Les quatre réflexes du chapitre

1. **Pour une égalité d'ensembles, penser double inclusion** — ou, mieux, enchaîner des équivalences sur « $x \in \dots$ ».
2. **Toute démonstration ensembliste est une démonstration logique déguisée.** On traduit $\cap$

en « et », $\cup$ en « ou », $-$ en « non », et l'on applique le chapitre 01.

3. **Pour déterminer un ensemble en extension, procéder par analyse puis synthèse** : les conditions nécessaires donnent une inclusion, la vérification donne l'autre.
4. **Pour la surjectivité et la réciproque, résoudre $f(x) = y$ d'inconnue x** — et toujours vérifier que la solution appartient à l'ensemble de départ.

RAPPEL — Vérification effectuée

Tous les exemples de ce chapitre ont été contrôlés par calcul symbolique : ensembles écrits en extension, images directes et réciproques, injectivité, surjectivité, bijection réciproque et compositions. Aucune erreur n'a été relevée dans les documents sources.